Chapitre 5

Espaces vectoriels normés

Contents

5.1 Normes et distances

E désigne un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ qui est un sous-corps de $\mathbb{C}$ (ce sera en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, exceptionnellement $\mathbb{Q}$).

5.1.1 Normes

5.1.1.1 Définition

- **DEFINITION**

Une **norme sur E** est une application N de E vers $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

  * $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ (**axiome de séparation**)
  * $\forall x \in E, \forall \mu \in \mathbb{K}, N(\mu x) = \mid \mu \mid N(x)$ (axiome d'**homogénéité**)
  * $\forall (x,y) \in E^2, N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (première **inégalité triangulaire**)

- Si N est une norme sur E, elle vérifie **la deuxième inégalité triangulaire** :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y)$$

Dem.

5.1.1.2 Exemples généraux

- La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$ (rappel : $\forall x \in \mathbb{R}, \mid x \mid = \sup\{-x, x\}$).
- Le module est une norme sur $\mathbb{C}$ (rappel : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \mid a + ib \mid = \sqrt{a^2 + b^2}$).
- Si (E, N) est un espace vectoriel normé et si F est un sous-espace vectoriel de E, la restriction de N à F définit une norme, appelée norme induite par N dans F.
- **PROPRIETE** - **DEFINITION Norme associée à un produit scalaire**

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(. \mid .)$, l'application $\| \ \|$ définie sur E par : $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ est une norme, appelée norme euclidienne ou norme préhilbertienne en dimension non finie, vérifiant de plus :

  * $\forall (x,y) \in E^2$, $\mid (x \mid y) \mid \leqslant \|x\| . \|y\|$ (**inégalité de Cauchy-Schwarz**).
  * $\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$

Dem.

5.1.1.3 Normes usuelles dans $\mathbb{K}^n$

PROPRIETE

Les trois applications suivantes sont des normes dans $\mathbb{K}^n$:

- $N_1 : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} \mid x_i \mid \end{array}\right)$. **On la note aussi** $\| \ \|_1$
- $N_2 : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2} \end{array}\right)$. **On la note aussi** $\| \ \|_2$
- $N_\infty : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \mathrm{Sup}\{\mid x_i \mid, \ i \in [\![1,n]\!]\} \end{array}\right)$. **On la note aussi** $\| \ \|_\infty$

Dem.

5.1.1.4 Transport d'une norme d'un espace vectoriel sur un autre

- **PROPRIETE**

  Si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, si N est une norme sur F et si f est une application linéaire et injective de E dans F, on définit une norme ν dans E en posant : $\forall x \in E, \ \nu(x) = N(f(x))$.

  Dem.

- En particulier, on pourra transporter une norme d'un espace vectoriel normé (F,N) sur tout espace E isomorphe à F
- **Exemple fondamental** : si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie d et si $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_d)$ est une base de E, alors $g : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^d & \longrightarrow & E \\ (x_1,\dots,x_d) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{d} x_i e_i \end{array}\right)$ est un isomorphisme, donc, si N est une norme dans $\mathbb{K}^d$, on définit une norme ν dans E en posant $\nu\left(\sum\limits_{i=1}^{d} x_i e_i\right) = N(x_1,\dots,x_d)$.

  En particulier, on dispose dans E des normes suivantes :

$$\nu_1 : \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \to \sum_{i=1}^{d} \mid x_i \mid \qquad \nu_2 : \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \to \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \mid x_i \mid^2} \qquad \nu_\infty : \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \to \sup_{i\in[\![1,d]\!]} \mid x_i \mid.$$

5.1.1.5 Normes usuelles dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$

On note ici $E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues définies sur le segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ $(a<b)$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

PROPRIETE - DEFINITION

Les trois applications suivantes sont des normes dans $E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$:

- $N_1=\|\|_1 : \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longmapsto & \int_a^b |f(t)|dt \end{array}\right)$ **Norme de la convergence en moyenne**
- $N_2=\|\|_2 : \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longmapsto & \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \end{array}\right)$ **Norme de la convergence en moyenne quadratique**
- $N_\infty=\|\|_\infty : \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longmapsto & \mathrm{Sup}\left\{|f(t)|,\ t\in[a,b]\right\} \end{array}\right)$ **Norme de la convergence uniforme**

Dem.

5.1.1.6 Norme d'un espace produit

PROPRIETE

Si $((E_1,N_1),\ldots,(E_p,N_p))$ sont p espaces vectoriels normés, on définit une norme ν sur l'espace produit $E=E_1\times\ldots\times E_p$ en posant ν : $\left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x_1,\ldots,x_p) & \longmapsto & \sup\limits_{i\in[1,p]} N_i(x_i) \end{array}\right)$

Dem.

5.1.1.7 Norme d'algèbre

- **DEFINITION**

Si $(E,+,\times,.)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, une norme N de l'espace vectoriel E est qualifiée de **norme d'algèbre** lorsqu'elle vérifie de plus : $\forall (x,y) \in E^2$, $N(x \times y) \leqslant N(x)N(y)$ et $N(1_E) = 1$

5.1.2 Normes équivalentes

5.1.2.1 Définition

- **DEFINITION**

Deux normes N et N' d'un même espace vectoriel normé E sont **équivalentes** lorsque :
$\exists (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \;/\; \forall x \in E, \quad aN(x) \leqslant N'(x) \leqslant bN(x)$

Cette relation sur les normes de E est clairement une relation d'équivalence.

- N et N' sont équivalentes si et seulement si l'ensemble de réels $\mathcal{F} = \left\{ \dfrac{N'(x)}{N(x)},\ x \in E \backslash \{0\} \right\}$ est inclus dans un segment $[a,b]$ avec $0 < a < b$.
- Pour que deux normes N et N' ne soient pas équivalentes, il suffit qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E\backslash\{0\}$ telle que la suite $\left(\dfrac{N'(x_n)}{N(x_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ou diverge vers $+\infty$.

5.1.2.2 Exemples

- **PROPRIETE**

Dans $\mathbb{K}^n$, les normes N_1, N_2 et N_∞ sont deux à deux équivalentes.

Dem.

- **PROPRIETE**

Dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, deux normes parmi N_1, N_2 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Dem.

5.1.2.3 Théorème

- **THEOREME**

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Dem.

COMPLEMENT Pour les curieux : On démontre le résultat en 3 étapes :

- Dans $\mathbb{K}^p$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, les parties fermées et bornées sont compactes. En effet si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Soit A une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^p$. Alors il existe $a>0$ tel que $A\subset[-a,a]^p$. Or $C=[-a,a]^p$ est un compact comme produit de compacts, et donc $A=A\cap C$ est un compact car c'est une partie fermée d'un compact. Pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on constate d'abord que la boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|.\|_2$ est compacte (car fermée et incluse dans la boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|.\|_\infty$). Il en va de même pour toute boule fermée. Ainsi une partie fermée et bornée dans $\mathbb{C}^p$ pour la norme $\|.\|_\infty$ est compacte (fermée dans un compact D^p où D disque fermé de centre 0 dans $\mathbb{C}$).
- Toutes les normes de $\mathbb{K}^p$ sont équivalentes. Il suffit de montrer qu'une norme N quelconque de $\mathbb{K}^p$ est équivalente à la norme $\|.\|_\infty$. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Soit $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$. On a $N(x)\leqslant\sum_{i=1}^n|x_i|\,N(e_i)\leqslant b\|x\|_\infty$ où $b=\sum_{i=1}^n N(e_i)$. On en déduit une première inégalité, mais également, à l'aide de la deuxième inégalité triangulaire, que N est $b-$lipschitzienne et donc continue. En particulier, l'image de la sphère unité S (qui est compacte dans $(\mathbb{K}^p,\|.\|_\infty)$) est un compact de $\mathbb{R}_+^*$. Donc il existe $a>0$ tel que $\forall x\in S, N(x)\geqslant a$ et donc par homogénéité, $\forall x\in\mathbb{K}^p, N(x)\geqslant a\|x\|_\infty$.
- Toutes les normes d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Soit u isomorphisme de $\mathbb{K}^p$ vers E. Soient N et N' deux ormes sur E. Alors $N\circ u$ et $N'\circ u$ sont deux normes sur $\mathbb{K}^p$ donc sont équivalentes : il existe $a>0$ et $b>0$ tels que $\forall x\in\mathbb{K}^p, aN(u(x))\leqslant N'(u(x))\leqslant bN(u(x))$. Aussi $\forall y\in E, aN(y)\leqslant N'(y)\leqslant bN(y)$.

5.1.3 Eléments de topologie

5.1.3.1 Distance entre deux points

- **DEFINITION**

Si A est un ensemble, on appelle **distance dans A** toute application $d: A\times A\to\mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants :

* $\forall(x,y)\in A^2,\quad d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y\quad$ (axiome de **séparation**)
* $\forall(x,y)\in A^2,\quad d(x,y)=d(y,x)\quad$ (axiome de **symétrie**)
* $\forall(x,y,z)\in A^3,\quad d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)\quad$ (**inégalité triangulaire**)

- **PROPRIETE**

Soit (E,N) un espace vectoriel normé et A une partie de E.
Alors l'application $d:\begin{pmatrix} A\times A & \longrightarrow & \mathbb{R}_+\\ (x,y) & \longmapsto & N(x-y)\end{pmatrix}$ est une distance, dite associée à la norme N

Dem.

5.1.3.2 Distance d'un point à une partie

- **PROPRIETE - DEFINITION**

Si A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E,N), si x est un élément de E, l'ensemble $\{N(x-a),\ a\in A\}$ admet une borne inférieure. Celle-ci se nomme "distance de x à A" et se note $d(x,A)$.

Dem.

- **PROPRIETE**

  $\boxed{\textbf{Si } x \in A\textbf{, alors } d(x, A) = 0 \textbf{ mais la réciproque est fausse}}$.

  Dem.

- **Rappel** : Si E est un espace préhilbertien, et si A est un sous espace vectoriel de dimension finie de E, alors $d(x, A) = \|x - p(x)\|$ où $p(x)$ est le **projeté orthogonal** de x sur A.

5.1.3.3 Boules et sphères

(E, N) est un espace vectoriel normé.

- **DEFINITION**

  a étant un vecteur de E et r un réel positif, on définit :
  - $\mathring{B}(a,r) = \{x \in E \,/\, N(x-a) < r\} = \{x \in E \,/\, d(x,a) < r\}$, **boule ouverte** de centre a et de rayon r.
  - $\overline{B}(a,r) = \{x \in E \,/ N(x-a) \leqslant r\} = \{x \in E \,/\, d(x,a) \leqslant r\}$, **boule fermée** de centre a et de rayon r.
  - $S(a,r) = \{x \in E \,/\, N(x-a) = r\} = \{x \in E \,/\, d(x,a) = r\}$, **sphère** de centre a et de rayon r.

- **Remarques** :
  - Si $r = 0$, $\mathring{B}(a,r) = \emptyset$, $\overline{B}(a,r) = \{a\}$, $S(a,r) = \{a\}$
  - $\overline{B}(a,r) \backslash \mathring{B}(a,r) = S(a,r)$
- On appelle **boule unité** la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.
- On appelle **vecteur unitaire** tout vecteur dont la norme vaut 1, c'est à dire tout vecteur de la sphère $S(0_E, 1)$.
- **PROPRIETE**

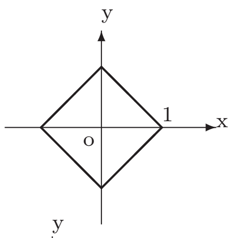
  Si x est un vecteur non nul, $\dfrac{x}{N(x)}$ est unitaire.

  Dem.
- **PROPRIETE**

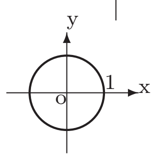
  Si N et N' sont des normes équivalentes, toute boule (ouverte ou fermée) de centre a pour la norme N contient une boule de même centre a pour la norme N' et est contenue dans une boule de même centre a pour la norme N'.

  Dem.

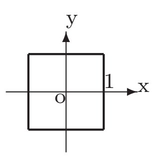
- Dans $\mathbb{R}^2$, les boules unité associées aux trois normes usuelles sont les suivantes :
  - Pour N_1 : $\overline{B}(0,1) = \{(x,y) / \mid x \mid + \mid y \mid \leqslant 1\}$



  - Pour N_2 : $\overline{B}(0,1) = \{(x,y) / x^2 + y^2 \leqslant 1\}$



  - Pour N_∞ : $\overline{B}(0,1) = \{(x,y) / \mid x \mid \leqslant 1 \text{ et } \mid y \mid \leqslant 1\}$



5.1.3.4 Parties bornées

- **DEFINITION**

Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite **bornée** lorsque $\{N(x),\ x \in A\}$ est un ensemble majoré.

- **DEFINITION Définition équivalente**

A est une partie bornée d'un espace vectoriel normé (E, N) lorsque :
$\exists R \in \mathbb{R}_+^* \ / \forall x \in A,\ \ N(x) \leqslant R$

- **PROPRIETE**

A est une partie bornée d'un espace vectoriel normé (E, N) lorsque A est incluse dans une boule de (E, N). En particulier, les boules de (E, N) sont des parties bornées de (E, N).

- **PROPRIETE**

Si N et N' sont des normes équivalentes dans E, les parties bornées de (E, N) sont les parties bornées de (E, N').

- **DEFINITION**

Soit f une fonction d'un ensemble X non vide vers l'EVN E muni de la norme N. On dit que **f est bornée** si l'ensemble $f(X)$ est une partie bornée de E

5.1.3.5 Parties convexes

- **DEFINITION**

Si a et b sont deux points de E, le **segment** $[a, b]$ est l'ensemble $[a, b] = \{(1-t).a + t.b,\ \ t \in [0, 1]\ \}$.

- **DEFINITION**

Une partie A d'un espace vectoriel est dite **convexe** lorsque : $\forall (a, b) \in A^2,\ \ [a, b] \subset A$

- **PROPRIETE**

L'intersection d'une famille de parties convexes de E est une partie convexe.

Dem.

- **PROPRIETE**

Dans $\mathbb{R}$ les parties convexes sont les intervalles.

Dem.

- **PROPRIETE**

Les boules (ouvertes ou fermées) d'un espace vectoriel normé (E, N) sont des parties convexes.

Dem.

5.2 Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

(E, N) est un espace vectoriel normé.

5.2.1 Généralités sur les suites

5.2.1.1 Définition

- **DEFINITION**

  Une **suite** à valeurs dans E est une application u définie sur un intervalle illimité d'entiers naturels $\mathbb{N} \cap [n_0, +\infty[$ et à valeurs dans E que l'on note $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ ou plus simplement (u_n).

- **DEFINITION**

  L'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans E est noté $E^{\mathbb{N}}$.

- On munit $E^{\mathbb{N}}$ de deux lois de composition :
  - ∗ L'addition des suites : Si $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ sont des éléments de $E^{\mathbb{N}}$, on pose $u+v = (u_n+v_n)$
  - ∗ Le produit par un scalaire : Si $u = (u_n)$ est un élément de $E^{\mathbb{N}}$ et μ un scalaire du corps $\mathbb{K}$, on pose $\mu.u = (\mu.u_n)$

  PROPRIETE

  $(E^{\mathbb{N}}, +, .)$ devient ainsi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- **PROPRIETE**

  Lorsque E est de plus une algèbre, on munit $E^{\mathbb{N}}$ d'une multiplication interne :
  ∗ Si $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ sont des éléments de $E^{\mathbb{N}}$, on pose $u \times v = (u_n \times v_n)$
  $(E^{\mathbb{N}}, +, \times, .)$ devient ainsi une $\mathbb{K}$-algèbre.

5.2.1.2 Suites bornées

- **DEFINITION**

  Une suite (u_n) de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** lorsque l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est borné. On a donc : (u_n) bornée si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ N(u_n) \leqslant M$

- **PROPRIETE**

  L'ensemble des suites bornées de vecteurs de E constitue un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ que l'on note $\ell^\infty(E)$. (Dans le cas où (E, N) est une algèbre normée, $\ell^\infty(E)$ est une sous algèbre de $E^{\mathbb{N}}$)

5.2.2 Suites convergentes

5.2.2.1 Définition

- **DEFINITION**

  Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** lorsque :

  $$\exists L \in E, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow N(u_n - L) \leqslant \varepsilon$$

  Une suite non convergente est dite **divergente**

- **PROPRIETE - DEFINITION**

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, le vecteur L de la définition ci-dessus est unique, on le nomme limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on le note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ ou $\lim u_n$

Dem.

5.2.2.2 Propriétés

- **PROPRIETE**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L \Leftrightarrow (u_n - L)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_E \Leftrightarrow (N(u_n - L))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0_{\mathbb{R}}$

Dem.

- **PROPRIETE**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers L si et seulement si toute boule de centre L et de rayon strictement positif contient tous les termes de la suite au delà d'un certain rang.
$\lim(u_n) = L \Leftrightarrow \forall r > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \in \overline{B}(L, r)$

- **PROPRIETE**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L \Rightarrow (N(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $N(L)$

- **PROPRIETE**

Toute suite convergente est bornée.
L'ensemble Conv(E) des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(E)$ et l'application $\lim : \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{Conv}(E) & \longrightarrow & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim u_n \end{array}\right)$ **est linéaire.**

- **PROPRIETE**

Lorsque (E, N) est une algèbre normée, Conv(E) est stable par multiplication et :
$\forall \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in \mathrm{Conv}(E)^2,\ \ \lim(u_n \times v_n) = \lim(u_n) \times \lim(v_n)$.

- **PROPRIETE**

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de E convergente vers L, si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de scalaires de $\mathbb{K}$ convergente vers μ, alors la suite $(\mu_n.u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est $\mu.L$.

- **PROPRIETE**

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de E, on définit les suites extraites des termes de rangs pairs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et impairs $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers L si et seulement si les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers L.

5.2.2.3 Equivalence des normes

L'espace vectoriel E est ici muni de deux normes N et N'.

- **PROPRIETE**

Si les normes N et N' sont équivalentes alors :

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}},\ \left(N(u_n) \longrightarrow 0 \Leftrightarrow N'(u_n) \longrightarrow 0 \right)$$

- **PROPRIETE**

Si les deux normes N et N' sont équivalentes, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est convergente dans (E,N) si et seulement si elle converge dans (E,N') (et la limite est la même). En particulier en dimension finie où toutes les normes sont équivalentes, on travaillera avec n'importe quelle norme sans nécessairement la préciser pour tester la convergence d'une suite.

5.2.2.4 Suites à valeurs dans un espace de dimension finie

On suppose ici que E est de dimension finie d et que $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_d)$ est une base de E

- **PROPRIETE**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. Les suites composantes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les d suites de scalaires $\left(x_n^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $(i\in[\![1,d]\!])$ définies par : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\sum_{i=1}^{d}x_n^ie_i$

- **PROPRIETE**

Soit $L=\sum_{i=1}^{d}y^ie_i$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L ssi pour tout i de $[\![1,d]\!]$, $\left(x_n^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y^i.

5.2.2.5 Suites dans un espace produit

- **PROPRIETE**

Si $E=E_1\times\cdots\times E_p$ est un espace produit, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\left(u_n^1,\dots,u_n^p\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L=(L_1,\dots,L_p)$ ssi pour tout i de $[\![1,p]\!]$, $\left(u_n^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L_i.

5.3 Eléments de topologie dans les espaces vectoriels normés

(E,N) est un espace vectoriel normé.

5.3.1 Voisinages d'un point

5.3.1.1 Définition

- **DEFINITION**

a étant un point de E et V une partie de E, V est un **voisinage de a** si V contient une boule de centre a et de rayon strictement positif.

- **Notation** On notera $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a ($\mathcal{V}_N(a)$ s'il y a risque de confusion entre plusieurs normes). On a donc :

$$\forall a\in E,\ \forall V\in\mathcal{P}(E),\qquad V\in\mathcal{V}(a)\Leftrightarrow\exists r>0\ ,\ B(a,r)\subset V$$

- On ne précise pas la nature de la boule (ouverte ou fermée) car si $\overline{B}(a,r) \subset V$, alors $\overset{\circ}{B}(a,r) \subset V$, et si $\overset{\circ}{B}(a,r) \subset V$, alors $\overline{B}\,(a, r/2) \subset V$.

5.3.1.2 Propriétés

- **PROPRIETE**

  Deux normes équivalentes définissent les mêmes voisinages, en particulier en dimension finie, la notion de voisinage est intrinsèque (indépendante du choix de la norme dans E).

- **PROPRIETE**

  Si V et W sont deux parties de E et si V est incluse dans W, si V est voisinage d'un point a, alors W est aussi voisinage de a.

- **PROPRIETE**

  La réunion d'une famille quelconque de voisinages d'un point a est un voisinage de a.

- **PROPRIETE**

  L'intersection d'une famille finie de voisinages d'un point a est un voisinage de a.

5.3.1.3 Convergence des suites

- **PROPRIETE**

  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers L si et seulement si :** $\forall V \in \mathcal{V}(L),\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \in V$

5.3.2 Ouverts, intérieur

Soit A une partie de E

5.3.2.1 Parties ouvertes

- **DEFINITION**

  A est dite **ouverte** lorsque A est voisinage de chacun de ses points :

  $$A \text{ ouvert} \Leftrightarrow \forall a \in E\ :\ a \in A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(a)$$

- **PROPRIETE**

  E, $\emptyset$, **les boules ouvertes sont des ouverts.**

- **PROPRIETE**

  Dans $\mathbb{R}$, les intervalles ouverts sont des ouverts, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ne sont pas ouverts.

- **PROPRIETE**

  Deux normes équivalentes définissent les mêmes parties ouvertes.

- **PROPRIETE Réunion et intersection**

  * **L'intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert**
  * **La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.**

- **PROPRIETE Produit fini**

  Le produit fini d'ouverts est un ouvert

- Remarque (HP) Un **espace topologique** est un couple $(X, \mathcal{O})$ avec X un ensemble et $\mathcal{O}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant : X et $\emptyset$ sont dans $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}$ est stable par réunion quelconque et intersection finie. Les éléments de $\mathcal{O}$ étant appelés les ouverts de E. Il existe d'autres exemples d'espaces topologiques que ceux provenant d'un espace vectoriel normé.

5.3.2.2 Points intérieurs

- **DEFINITION**

  Soit a un point de A. a est dit **intérieur à A** lorsque A est un voisinage de a.

- **DEFINITION**

  On note $\mathring{A}$ (**intérieur de A**) l'ensemble des points intérieurs à A. On a ainsi :

$$a \in \mathring{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(a)$$

- **PROPRIETE**

  $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A

  Dem.

- **PROPRIETE**

  A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$

  Dem.

5.3.3 Fermés, adhérence

Soit A une partie de E

5.3.3.1 Parties fermées

- **DEFINITION**

  A est dite **fermée** lorsque $E \backslash A$ est ouverte.

- **PROPRIETE**

  E, $\emptyset$, les boules fermées, les sphères sont des fermés.

- **PROPRIETE**

  Dans $\mathbb{R}$, les intervalles fermés sont des fermés, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ne sont pas fermés

- **PROPRIETE**

  Deux normes équivalentes définissent les mêmes parties fermées.

- **PROPRIETE Réunion et intersection**

  * **L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.**
  * **La réunion d'une famille finie de fermés est un fermé.**

- **PROPRIETE Produit fini**

  Le produit fini de fermés est un fermé

DEFINITION

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on a des normes (par exemple norme subordonnée à une base). Or toutes les normes dans cet espace E seront équivalentes donc les fermés et les ouverts sont les mêmes indépendamment de la norme choisie. On dira que cette topologie est la **topologie naturelle de E**

5.3.3.2 Points adhérents

- **DEFINITION**

  Soit a un point de E. a est dit **adhérent** à A lorsque tout voisinage de a intercepte A i.e. $\forall V \in \mathcal{V}(a),\ V \cap A \neq \emptyset$

- **DEFINITION**

  On note $\overline{A}$ (**adhérence de A**) l'ensemble des points adhérents à A. On a ainsi :

  $$a \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(a),\ V \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall r > 0, \mathring{B}(a,r) \cap A \neq \varnothing$$

- **PROPRIETE**

  $\overline{E\backslash A} = E\backslash\mathring{A}$ **et** $\overbrace{E\backslash A}^{\circ} = E\backslash\bar{A}$

- **PROPRIETE**

  $\bar{A}$ **est le plus petit fermé contenant** A

  Dem.

- **PROPRIETE**

  A **est fermé si et seulement si** $A = \bar{A}$

  Dem.

5.3.3.3 Critères séquentiels

- **PROPRIETE**

Un point a de E est adhérent à A si et seulement si il est limite d'une suite de points de A :

$$a \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}},\ \lim(a_n) = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in A$$

Dem.

- **PROPRIETE**

A est fermée si et seulement si toute suite qui est convergente et dont tous les termes sont dans A a pour limite un vecteur de A :

$$A = \bar{A} \Leftrightarrow \forall\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Conv}(E),\ (\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in A \Rightarrow \lim(a_n) \in A)$$

Dem.

- **PROPRIETE**

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé (E, N), alors F est une partie fermée de E.

Dem.

5.3.3.4 Densité

- **DEFINITION**

A est dite **dense dans une partie** B de E lorsque $A \subset B \subset \overline{A}$

- En particulier A est dense dans E (ou partout dense) lorsque $\overline{A} = E$, c'est à dire lorsque tout vecteur de E est limite d'une suite de vecteurs de A

5.3.3.5 Frontière

- **DEFINITION**

Un point x de E est dit **point frontière** de A lorsque x est adhérent à A et à $E \backslash A$

- **PROPRIETE - DEFINITION**

**La frontière de A est $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{E \backslash A} = \overline{A} \cap (E \backslash \mathring{A}) = \overline{A} \backslash \mathring{A}$.
C'est une partie fermée.**

Dem.

5.3.4 Topologie induite

Soit E un espace vectoriel normé par N et A une partie non vide de E différente de E.

5.3.4.1 Ouverts, voisinages relatifs à A

- **DEFINITION**

On appelle **boule ouverte** de A pour la topologie induite de celle de (E, N), de centre $a \in A$ et de rayon $r > 0$, le sous-ensemble : $\mathring{B}_A(a, r) = \{x \in A / N(x-a) < r\} = \{x \in A / d(x, a) < r\}$.

- **DEFINITION**

On appelle **boule fermée** de A pour la topologie induite de celle de (E, N), de centre $a \in A$ et de rayon $r > 0$, le sous-ensemble : $\overline{B}_A(a, r) = \{x \in A / N(x-a) \leqslant r\} = \{x \in A / d(x, a) \leqslant r\}$.

- **Remarque** : Les boules ouvertes ou fermées de la topologie induite sont les intersections avec A des boules ouvertes ou fermées de (E, N) centrées en un point de A

- **DEFINITION**

Soit $U \subset A$ et $a \in A$. U est un **voisinage relatif de a dans A** s'il existe $r > 0$ tel que $\mathring{B}_A(a, r) \subset U$.

- **PROPRIETE**

Les voisinages de a relatifs à la topologie induite sur A sont les intersections des voisinages de a dans (E, N) avec A .

- **DEFINITION**

Soit $U \subset A$. U est un **ouvert relatif de A** si c'est un voisinage relatif de chacun de ses points.

- **PROPRIETE**

Les ouverts relatifs de A à sont les intersections des ouverts de (E, N) avec A .

5.3.4.2 Fermés relatifs à A

- **DEFINITION**

Soit $F \subset A$. F est un **fermé relatif de A** si c'est le complémentaire d'un ouvert relatif de A.

- **PROPRIETE**

Les fermés relatifs de A à sont les intersections des fermés de (E, N) avec A .

- **PROPRIETE Caractérisation séquentielle**

Soit $F \subset A$. F est un fermé relatif de A si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F convergente dans A, la limite est dans F.

Dem.

5.4 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

(E, N) est un espace vectoriel normé.

5.4.1 Valeurs d'adhérence d'une suite

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de E

5.4.1.1 Suites extraites

- **DEFINITION**

  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** (ou **sous-suite**) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout n on ait $a_n = u_{\varphi(n)}$
  φ est appelée **extractrice** associée

- **PROPRIETE**

  Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **PROPRIETE**

  Si φ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$

- **PROPRIETE**

  Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, toutes ses sous-suites sont convergentes vers $\lim(u_n)$.

- **PROPRIETE**

  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si et seulement si les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite.

  Dem.

5.4.1.2 Valeur d'adhérence

- **DEFINITION**

  $L \in E$ est une **valeur d'adhérence** de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers L.

- **PROPRIETE**

  Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers L, alors L est la seule valeur d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **PROPRIETE**

  Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ a deux valeurs d'adhérence, alors cette suite est divergente.

5.4.1.3 Théorèmes de Bolzano-Weierstrass

- **THEOREME Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$**

  Toute suite bornée de réels possède au moins une valeur d'adhérence.

- **THEOREME Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$**

  Toute suite bornée de complexes possède au moins une valeur d'adhérence.

- **THEOREME Théorème de Bolzano-Weierstrass dans un espace de dimension finie**

  Dans un espace vectoriel E, de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$:
  Toute suite bornée de vecteurs de E possède au moins une valeur d'adhérence.

  Dem.

5.4.2 Parties compactes

A est une partie de E

5.4.2.1 Définition

- **DEFINITION**

  A est dite **compacte** si et seulement si toute suite à valeurs dans A possède au moins une valeur d'adhérence dans A.

5.4.2.2 Propriétés

- **PROPRIETE**

  Si A est compacte, alors A est fermée et bornée.

  Dem.

- **PROPRIETE**

  Si A est compacte, toute partie fermée incluse dans A est compacte. Toute intersection de compacts est compacte.

  Dem.

- **PROPRIETE**

Un produit cartésien d'un nombre fini de compacts est un compact dans l'espace produit.

Dem.

- **PROPRIETE**

Si $(a_n)_{n\in N^n}$ est une suite à valeurs dans une partie compacte K de l'espace vectoriel normé (E, N), $(a_n)_{n\in N^n}$ est convergente si et seulement si $(a_n)_{n\in N^n}$ admet une unique valeur d'adhérence.

Dem.

5.4.2.3 Caractérisation des compacts en dimension finie

- **PROPRIETE**

Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, les parties compactes de E sont les parties fermées et bornées de E.

Dem.

- **COROLLAIRE**

Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E. Alors : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence.

Dem.

5.5 Séries dans les espaces vectoriels normés

5.5.1 Définitions

5.5.1.1 Terme général, somme partielle

- **DEFINITION**

Une **série** est un couple de suites $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ à valeurs dans l'espace produit $E \times E$ et telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour tout entier n, u_n s'appelle le terme général de la série, S_n la somme partielle de rang n de la série.

- Une série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement déterminée par la donnée de son terme général u_n (connaissant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on retrouve aisément la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$). On note $\sum u_n$ la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nommée série de terme général u_n.
- Une série est aussi parfaitement déterminée par ses sommes partielles : si on connait $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ est la suite définie par $u_0 = S_0$ et $\forall n > 0,\ u_n = S_n - S_{n-1}$.
- On aura des séries dont le terme général $(u_n)_{n\geqslant N_0}$ n'est défini quà partir d'un rang N_0, les sommes partielles ne seront définies qu'au delà de ce rang : $\forall n \geqslant N_0,\ S_n = \sum_{k=N_0}^{n} u_k$.

5.5.1.2 Série convergente, somme, restes partiels

- **DEFINITION**

La série $\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque la suite (S_n) de ses sommes partielles est convergente. Le vecteur S, limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est noté $S = \sum_{p=0}^{\infty} u_p$ et nommé somme de la série.

- Si $\sum u_n$ est une série convergente on définit la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des **restes partiels** de cette série par : $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = S - S_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$. Cette suite est convergente et a pour limite 0.
- $S = \lim_{p\to\infty} S_p$, donc, pour tout n, $R_n = \lim_{p\to\infty} S_p - S_n$. Or pour $p > n$, $S_p - S_n = \sum_{k=n+1}^{p} u_k$ donc $R_n = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=n+1}^{p} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, somme de la série de terme général $(u_k)_{k\geqslant n+1}$.
- Pour qu'une série $\sum u_n$ converge, il est nécessaire mais non suffisant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E. Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0_E, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**

5.5.1.3 Exemple

- **Séries télescopiques** :
  - La série de vecteurs $\sum u_n$ est dite **télescopique** lorsque : $\exists\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}\ /\ \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_{n+1} - x_n$.
  - **PROPRIETE**

La série télescopique $\sum (x_{n+1} - x_n)$ converge si et seulement si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge converge. On a dans ces conditions, $\sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) - x_0$.

5.5.2 Propriétés

5.5.2.1 Structures

- **PROPRIETE**

$SC(E) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum u_n \texttt{ converge} \right\}$ est un espace vectoriel et l'application $S : \left(\begin{array}{ccc} SC(E) & \longrightarrow & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array} \right)$ est linéaire.

Dem.

- **PROPRIETE**

Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n + v_n$ diverge.

- **Attention** il se peut que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent tandis que $\sum (u_n+v_n)$ converge. Avant d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ il faut s'assurer que toutes les séries convergent (il suffit pour cela que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent).

5.5.2.2 Cas de la dimension finie

E est ici un espace de dimension finie d et $(e_1, \dots, e_d)$ en est une base.

- **DEFINITION**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs, et $\left(u_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $k \in [\![1, d]\!]$, ses suites composantes. On appelle **séries composantes** dans la base $(e_1, \dots, e_d)$ de la série $\sum u_n$ les d séries $\sum u_n^k$, $k \in [\![1, d]\!]$.

- **PROPRIETE**

Pour qu'une série de vecteurs converge, il faut et il suffit que ses séries composantes soient convergentes.

On a alors, avec les notations précédentes, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^1\right) e_1 + \dots + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^d\right) e_d$

Dem.

5.5.2.3 Convergence absolue

- **DEFINITION**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de (E, N).
La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** lorsque la série de réels positifs $\sum N(u_n)$ est une série convergente.

- **PROPRIETE**

Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, toute série absolument convergente de vecteurs de E est une série convergente.

Dem.

- **Exemples de séries matricielles** : on suppose ici que E est l'algèbre $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On admet qu'il existe dans E une norme N qui est une norme d'algèbre.

  * Si A est une matrice de E, on a, pour tout entier n : $N(A^n) \leqslant (N(A))^n$
  * Si A est une matrice de E telle que $N(A) < 1$, la série **"géométrique"** $\sum A^n$ est convergente et sa somme est la matrice inverse de la matrice $I_p - A$.
  * Pour toute matrice A de E, la série **"exponentielle"** $\sum \frac{1}{n!} A^n$ est convergente. Sa somme est nommée **"exponentielle de A"** et notée $\exp(A)$ ou e^A.