Programme de Colle - Semaine n° 09

Du 27 novembre 2023 au 01 décembre 2023

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**.
Remarque : La note pour un membre du groupe B ne pourra pas dépasser 14
Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Espaces vectoriels normés

Normes et distances

- ✏ Définition de norme
- ✏ Norme produit, norme d'algèbre
- ✏ Distance. Distance d'un point à une partie
- ✏ Normes usuelles dans $\mathbb{K}^n$ ou $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$
- ✏ Normes équivalentes. Cas dimension finie.
- ✏ Boules, parties bornées, parties convexes

Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

- ✏ Généralités sur les suites, suites bornées.
- ✏ Suites à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.
- ✏ Suites convergentes. Lien avec l'équivalence de normes
- ✏ Suites dans un espace produit

Eléments de topologie dans un espace vectoriel normé

- ✏ Voisinages d'un point. Ouvert, intérieur
- ✏ Topologie induite sur une partie d'un EVN
- ✏ Fermés, adhérence. Densité. Frontière

Partie compacte d'un espace vectoriel normé

- ✏ Valeurs d'adhérence d'une suite.
- ✏ Parties compactes. Définition, propriétés.
- ✏ Théorème de Bolzano Weierstrass dans un EVN de dimension finie
- ✏ Caractérisation en dimension finie

Séries dans un espace vectoriel normé

- ✏ Terme général, somme partielle.
- ✏ Convergence absolue
- ✏ Série convergente, somme, restes partiels
- ✏ Exponentielle d'une matrice

Fonctions : limite, continuité

Fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: rappel

- ✏ Limite finie/infinie en un point a fini/infini
- ✏ Limites des fonctions monotones
- ✏ Théorème des valeurs intermédiaires
- ✏ Limite par encadrement
- ✏ Théorème d'homéomorphisme

Fonctions convexes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

- ✏ Définition. Inégalité de Jensen
- ✏ Caractérisations pour des fonctions dérivables : croissance de f'.
- ✏ Inégalité des trois pentes, Epigraphe, croissance des pentes.
- ✏ Inégalité arithmetico-géométrique

Etude locale au voisinage d'un point adhérent

- ✏ Limite en un point adhérent à A
- ✏ Restrictions.
- ✏ Continuité en un point
- ✏ Propriétés, opérations sur les limites.
- ✏ Limites infinies ou en l'infini

Propriétés globales des fonctions

- ✏ Fonctions bornées.
- ✏ Fonctions continues.
- ✏ Fonctions uniformément continues.
- ✏ Fonctions lipschitziennes.
- ✏ Liens entre les ensembles constitués de ces différentes fonctions

Exercices et questions de cours

1. **<u>TOUS</u>** Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$: définition. Pour une d'entre elles, au choix de l'interrogateur, montrer que c'est une norme. Les comparer.
2. $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. **<u>TOUS</u>** Si A est une partie non vide d'un EVN (E,N) et x un point de E, alors $d(x,A)=d(x,\overline{A})$.
4. **<u>TOUS</u>** Si A est une partie non vide bornée d'un EVN (E,N) alors $\overline{A}$ est bornée et $\text{Diam}(A)=\text{Diam}(\overline{A})$.
5. **<u>TOUS</u>** Si A est une partie non vide d'un EVN (E,N) et x un point de E, alors $d(x,A)=0 \iff x\in\overline{A}$.
6. En dimension finie, les compacts sont les parties fermées bornées.
7. En dimension finie, la convergence absolue d'une série entraine sa convergence.

8. **<u>TOUS</u>** BANQUE CCP 35
   E et F désignent deux espaces vectoriels normés.
   (a) Soient f une application de E dans F et a un point de E.
   On considère les propositions suivantes :
   P1. f est continue en a.
   P2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(a)$.
   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
   (b) Soit A une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé E, et soient f et g deux applications continues de E dans F, F désignant un espace vectoriel normé.
   Démontrer que si, pour tout $x\in A$, $f(x)=g(x)$, alors $f=g$.

9. BANQUE CCP 34
   Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.
   (a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
   (b) Démontrer que : $x\in\bar{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n\in\mathbb{N}, x_n\in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$.
   (c) Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (d) Démontrer que, si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

10. **<u>TOUS</u>** BANQUE CCP 44
    Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.
    (a) i. Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
    ii. Montrer que $A\subset B \Longrightarrow \overline{A}\subset\overline{B}$.
    (b) Montrer que $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
    Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
    (c) i. Montrer que $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.
    ii. Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E=\mathbb{R}$).

11. BANQUE CCP 43
    Soit $x_0\in\mathbb{R}$.
    On définit la suite (u_n) par $u_0=x_0$ et, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\text{Arctan}(u_n)$.
    (a) i. Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
    ii. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
    (b) Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=h(\text{Arctan}\, x)$.

<u>Prochain programme :</u> Propriétés topologiques des applications continues, continuité des applications (multi)linéaires, Suites de fonctions

GROUPES DE COLLES
Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles
<u>G 2</u> : Taffin, Breton , <u>G 4</u> : Arar , Munir , <u>G 5</u> Le Bris , Durand , **<u>G 6 : Tous</u>** Jacquin , Pohu , Ribes
<u>G 7</u> Queinnec , <u>G 8</u> Niangoran , Polydore , <u>G 9</u> Verdin , <u>G 10</u> Jayad , Laurent
<u>G 12 Tous</u> Dathevy , Auger , <u>G 13 Tous</u> Foulon , Chaumont , Morillon , <u>G 14</u> Plessis, Varennes , <u>G 15</u> Briard
Groupe A : les autres