Programme de Colle - Semaine n° 12
Du 18 décembre 2023 au 22 décembre 2023

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él 'eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**.
Remarque : La note pour un membre du groupe B ne pourra pas dépasser 14
Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Suites et séries de fonctions

Modes de convergence

- ✏ Convergence simple, convergence uniforme. Plan d'étude d'une suite de fonctions.
- ✏ Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. Plan d'étude d'une série de fonctions.
- ✏ Continuité de la limite (resp. somme) uniforme d'une suite (resp. série) de fonctions continues et th double limite (ou th d'interversion des symboles lim et $\int$).

Approximations uniformes

- ✏ Approximation d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier.
- ✏ Approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.
- ✏ Approximation d'une fonction continue sur un segment par des polynômes (admis).

Intégration et dérivation

Intégration sur un segment

- ✏ Intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs dans F EVN de dimension finie
- ✏ Intégration des fonctions continues
- ✏ Sommes de Riemann.
- ✏ Comparaison des normes dans $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{C})$.
- ✏ Passage à la limite sous le signe $\displaystyle\int_{[a,b]}$, interversion des signes $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\displaystyle\int_{[a,b]}$

Dérivation sur un intervalle

- ✏ Dérivabilité en un point. Opérations sur les fonctions dérivables en un point
- ✏ Fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ sur I
- ✏ Propriétés particulières des fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$: Rolle, accroissements finis, monotonie, convexité

Primitives et intégrales

- ✏ Primitives d'une fonction continue ; Théorème fondamental
- ✏ Intégration par parties ; Changement de variables ; Théorèmes de Taylor

Lien avec suites et séries de fonctions

- ✏ Primitive s'annulant en a de la limite (resp somme) d'une suite (resp série) de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment de l'intervalle I
- ✏ Dérivabilité (et dérivée) de la limite (ou somme) d'une suite (série) de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ **Enoncé à connaitre pour tous**

Exercices et questions de cours

1. **TOUS** $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. **TOUS** Si f est une fonction continue d'un compact K de E vers $\mathbb{R}$ alors f est majorée et qu'elle atteint son maximum
3. Deux fonctions continues coïncidant sur une partie dense sont égales
4. Montrer que pour tout $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$
5. Caractérisation de la continuité pour les applications linéaires (resp. bilinéaires ou multi-linéaires)
6. **TOUS** Continuité en a de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues en a
7. **TOUS** Lemme de Lebesgue. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\,\sin(nt)\,dt = 0$
8. Approximation uniforme des fonctions continues par les fonctions en escalier.
9. Domaine de définition, continuité, limite aux bornes de $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$
10. **TOUS** Changement de variables dans une intégrale
11. **TOUS** Dérivation de $B(f,g)$ lorsque B est bilinéaire et f et g sont dérivables.
12. Convergence des sommes de Riemann (3 cas possibles : **"Groupe A"** : cas f continue ou cas f lipschitzienne, et **"Groupe B"** : cas f décroissante)
13. Rolle et accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles
14. Théorème de Taylor avec reste intégral
15. **Banque CCP : Ex 10** On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.
    (a) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
    (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.
16. **Banque CCP : Ex 18**
    On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.
    (a) Étudier la convergence simple de cette série.
    On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
    (b) i. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
    ii. La fonction S est-elle continue sur D ?
17. **TOUS Banque CCP : Ex 16**
    On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :
    $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$
    On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big[\ \ln\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big) - \dfrac{x}{n}\Big]$.
    (a) Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
    (b) Calculer $S'(1)$.
18. BANQUE CCP 53
    On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.
    (a) i. Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
    On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
    ii. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
    $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

iii. $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

(b) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

(c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Prochain programme : **Séries entières**

GROUPES DE COLLES
Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles
G 2 : Taffin, Breton , **G 4** : Arar , Munir , **G 5** Le Bris , Durand , **G 6 : Tous** Jacquin , Pohu , Ribes
G 7 Queinnec , **G 8** Niangoran , Polydore , **G 9** Verdin , **G 10** Jayad , Laurent
G 12 Tous Dathevy , Auger , **G 13 Tous** Foulon , Chaumont , Morillon , **G 14** Plessis, Varennes , **G 15** Briard
Groupe A : les autres