Programme de Colle - Semaine n° 14

Du 15 janvier 2024 au 19 janvier 2024

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**.
Remarque : La note pour un membre du groupe B ne pourra pas dépasser 14
ATTENTION : A partir de cette semaine deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte ~ 5 min) d'ordre pratique ou un énoncé précis d'un résultat du cours + une question de cours usuelle (Démo ou exo Banque CCP) pour chaque élève des deux groupes.

Questions courtes (~ 5 min, d'ordre pratique ou énoncé précis) pour tous les élèves

1. Option 1 : Déterminer la nature (convergence ou non convergence) des intégrales suivantes

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$ *Oui*

   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ *Oui*

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}dx$ *Oui*

   (d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ *Oui*

   (e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+3x)}}$ *Oui*

   (f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^2+x}$ *Non*

   (g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx$ *Oui*

   (h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$ *Oui*

2. Option 2 : Énoncé précis :

   (a) Changement de variables dans une intégrale impropre

   (b) Intégration par parties généralisée

   (c) Théorème de convergence dominée

   (d) Théorème d'intégration terme à terme

   (e) Théorème de continuité sous domination

   (f) Théorème de Leibniz (dérivation des intégrales à paramètre)

Cours

Suites et séries de fonctions, séries entières

Tout ce qui a été vu : mode de convergence, opération, continuité, intégration, dérivation, DSE usuels...

Intégration généralisée

- Intégrale convergente sur un intervalle quelconque, linéarité, additivité
- Intégrabilité d'une fonction sur un intervalle
- Intégrabilité des fonctions positives : comparaison, domination, équivalence.
- Fonctions de référence
- Intégration par parties et changement de variables sur les intégrales convergentes
- **Théorème de convergence dominée** pour les suites (ou séries ou familles) de fonctions
- Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Exercices et questions de cours

Si besoin, le colleur pourra rappeler que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. **TOUS** Lemme de Lebesgue. Montrer que pour $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\,\sin(nt)\,dt = 0$

2. **Groupe B** Règle de d'Alembert pour l'estimation du rayon de convergence d'une série entière
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_0 = a_1 = 1 = -a_2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$. Domaine de définition et expression de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
4. **TOUS** Existence et valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$
5. **TOUS** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$
6. **Banque CCP : Ex 25**
   (a) Démontrer que, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
   (b) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
7. **Banque CCP : Ex 26**
   Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t$.
   (a) Justifier que I_n est bien définie.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.
   (c) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?
8. **Banque CCP : Ex 8** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) i. Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
   ii. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
   (b) i. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
   ii. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
9. **<u>TOUS</u> Banque CCP : Ex 14**
   (a) Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
   (c) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}$.
10. **Banque CCP : Ex 27**
    Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + n^2 x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
    (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.
    (b) Soit $a \in]0, 1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?
    (c) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
    (d) Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

11. Domaine de définition, continuité, limite aux bornes de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$

12. **TOUS** Pour $x \in [-1,1]$, on pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-x)^n}{n(n-1)}$. Calculer $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$ de deux façons : à l'aide d'une DES et en calculant $f'(x)$

13. **Banque CCP : Ex 10** On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right) \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.
    (a) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
    (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(x^2+1\right) \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \mathrm{d}x$.

14. **TOUS Banque CCP : Ex 22**
    (a) Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
    (b) Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon, la fonction $f \ : \ x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

    La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?.

15. **Banque CCP : Ex 51**
    (a) Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

    On se propose de calculer la somme de cette série.

    (b) Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
    Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
    (c) En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
    (d) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Prochain programme : Intégrales dépendant d'un parametre

GROUPES DE COLLES

Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles
G 2 : Taffin, Breton , **G 4** : Arar , Munir , **G 5** Le Bris , **G 6** Jacquin
G 7 Queinnec , **G 8** Niangoran , **G 9** Verdin , **G 10** Jayad , Laurent, Clautrier
G 12 Tous Dathevy , Auger , **G 13** Foulon , Chaumont , **G 14** Plessis , **G 15** Briard, Denizot
Groupe A : les autres