Programme de Colle - Semaine n^o 19

Du 19 février 2024 au 23 février 2024

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**.
Remarque : La note pour un membre du groupe B ne pourra pas dépasser 14
ATTENTION : A partir de cette semaine deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte $\sim$ 5 min) d'ordre pratique ou un énoncé précis d'un résultat du cours + une question de cours usuelle (Démo ou exo Banque CCP) pour chaque élève des deux groupes.

Questions courtes ($\sim$ 5 min, d'ordre pratique ou énoncé précis) pour tous les élèves

1. Option 1 : Déterminer la nature (convergence ou non convergence) des intégrales suivantes

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$ *Oui*
   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}dx$ *Oui*
   (c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ *Oui*
   (d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^2+x}$ *Non*
   (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx$ *Oui*
   (f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$ *Oui*

2. Option 2 : Énoncé précis :

   (a) Changement de variables dans une intégrale impropre
   (b) Intégration par parties généralisée
   (c) Théorème de convergence dominée
   (d) Théorème d'intégration terme à terme
   (e) Théorème de continuité sous domination
   (f) Théorème de Leibniz (dérivation des intégrales à paramètre)
   (g) Théorème de dérivation d'une limite de suite de fonctions
   (h) Définition d'une tribu
   (i) Définition d'une probabilité
   (j) Énoncé du lemme de coalition
   (k) Réduction d'une isométrie vectorielle
   (l) Description d'une isométrie vectorielle directe en dimension 3

3. Option 3 : Petite démonstration classique
   Déterminer l'espérance et/ou la variance des variables aléatoires suivant une loi géométrique ou une loi de Poisson

Cours

Probabilités

Exercices sur les notions de probabilités rencontrées

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

- Produit scalaire. Norme euclidienne (ou pré-hilbertienne)
- Propriétés : identité de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski

Orthogonalité

- Famille orthogonale, famille orthonormale
- Orthonormalisation de Schmidt
- Expressions dans une base orthonormale d'un espace euclidien
- Orthogonalité de parties d'un espace pré-hilbertien
- Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.
- Projections et symétries orthogonales.
- Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie

Endomorphismes d'un espace euclidien

Adjoint d'un endomorphisme

- ✏ Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien
- ✏ Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien
- ✏ Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint
- ✏ Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée.
- ✏ Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*

Isométries vectorielles

- ✏ Isométrie vectorielle d'un espace euclidien
- ✏ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable
- ✏ Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale
- ✏ Réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.

Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

- ✏ Endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) d'un espace euclidien
- ✏ Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs autoadjoints
- ✏ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable
- ✏ Théorème spectral : si u est un endomorphisme autoadjoint, u est diagonalisable en base orthonormale.
- ✏ Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Définition et carctérisation à l'aide du spectre.
- ✏ Traduction matricielle

Exercices et questions de cours

1. **TOUS** Espérance, variance, fonction génératrice des lois usuelles (une ou deux par élève...)
2. Inégalité de Boole (ou sous-additivité)
3. **TOUS** Théorème de continuité croissante
4. **Groupe B** Inégalité de Markov
5. **Groupe B** Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
6. Loi faible des grands nombres
7. **TOUS** Variance d'une somme de v.a.r.d. indépendantes
8. **TOUS** Cauchy-Schwarz $\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$
9. **TOUS** Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire
10. **TOUS** Théorème de la projection orthogonale (distance entre entre un point et un s.e.v. de dimension finie est atteinte)
11. **Banque CCP MP**
    Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. *Remarque : les questions (a) et (b) sont indépendantes*
    (a) i. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
    ii. En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
    (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p). Déterminer la loi de X.
12. **Banque CCP MP**
    Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :
    $\forall (i,j) \in (\mathbb{N})^2, \mathbb{P}\left((X = i) \bigcap (Y = j)\right) = \dfrac{1}{e\, 2^{i+1}\, j!}$.
    (a) Déterminer les lois de X et Y.

(b) i. Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$
   ii. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$

(c) les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(d) Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$

13. **TOUS Banque 76**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
   (a) i. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
      ii. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
   (b) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

14. **TOUS Banque CCP MP 77**
Soit E un espace euclidien.
   (a) Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
   (b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
      i. Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
      ii. Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

15. **Banque CCP 63**
Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$. On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.
   (a) Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $\big(u(x)\big|x\big) = 0$ est-il forcément l'endomorphisme nul ?
   (b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
      i. $u \circ u^* = u^* \circ u$
      ii. $\forall (x,y) \in E^2$, $\big(u(x)\big|u(y)\big) = \big(u^*(x)\big|u^*(y)\big)$
      iii. $\forall x \in E$, $\big\|u(x)\big\| = \big\|u^*(x)\big\|$

16. **TOUS** Parmi les projecteurs, caractérisation des projecteurs orthogonaux par l'inégalité $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$

17. **TOUS** Parmi les projecteurs, caractérisation des projecteurs orthogonaux par le relation
$$\forall (x,y) \in E^2, \big\langle p(x)\big|y\big\rangle = \big\langle x\big|p(y)\big\rangle$$

18. **Banque CCP 80**
Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
   (b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

19. **Banque 81**
On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi\left(A, A'\right) = \mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$, où $\mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.

(c) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.

(d) Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

20. **Banque CCP 111**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

(a) Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
On note R_X son rayon de convergence.

i. Prouver que $R \geqslant 1$. On pose alors $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.
Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.

ii. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

(b) i. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Déterminer D_{G_X} et, $\forall\, t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

ii. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

21. **TOUS Banque CCP 66**

(a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Prouver que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \in [0, +\infty[$

(b) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

(c) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), AB = BA \Longrightarrow A^2 B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

(d) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$

Prochain programme : **Équations différentielles**

GROUPES DE COLLES

Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles
G 2 : Breton , **G 4** : Arar , Munir , **G 5** Le Bris , **G 6** Ribes , **G 7** Queinnec
G 8 Niangoran, Polydore , **G 9** Verdin , **G 10** Jayad , Laurent, Clautrier , **G 11** Riehl
G 12 Dathevy , Auger , **G 13** Foulon , **G 14** Plessis , **G 15** Briard, Denizot
Groupe A : les autres