Chapitre 14

Calcul différentiel

Contents

14.1 Propriétés locales **285**
14.1.1 Applications partielles 285
14.1.1.1 Applications partielles en un point selon un vecteur 285
14.1.1.2 Dérivées partielles (en un point selon une variable) 285
14.1.2 Continuité 286
14.1.3 Différentiabilité en un point 286
14.1.3.1 Rappel 286
14.1.3.2 Définitions 286
14.1.3.3 Analyse de la notion de différentiabilité en un point 287
14.1.3.4 Exemples 287
14.1.3.5 Matrice Jacobienne 288
14.1.3.6 Vecteur Gradient 288
14.2 Propriétés globales **289**
14.2.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 289
14.2.1.1 Fonctions différentiables 289
14.2.1.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 289
14.2.1.3 Propriétés 289
14.2.1.4 Composition des fonctions différentiables ou de classe $\mathcal{C}^1$ 290
14.2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k \quad (k \geqslant 1)$ 291
14.2.2.1 Définitions 291
14.2.2.2 Propriétés 292
14.2.2.3 Théorème de Schwarz 292
14.3 Exemples d'équations aux dérivées partielles **292**
14.3.1 Changements de variables classiques 292
14.3.1.1 Changement de variable linéaire 292
14.3.1.2 Changement de variable des coordonnées polaires 293
14.3.2 Application aux équations aux dérivées partielles 293
14.3.2.1 Exemples du premier ordre 293
14.3.2.2 Exemple du second ordre 294
14.4 Vecteurs tangents à une partie d'un espace vectoriel **295**
14.4.1 Vecteur tangent au support d'un arc 295
14.4.2 Vecteur tangent à une partie de E 295
14.4.2.1 Exemples d'ensembles de vecteurs tangents 295
14.5 Optimisation **296**
14.5.1 Extremum local 296
14.5.1.1 Définitions 297

14.5.1.2 Théorème d'ordre 1 297
14.5.1.3 Etude au second ordre 297
14.5.2 Optimisation sous contrainte 298
14.6 Complément 300
14.6.1 Caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 300
14.6.2 Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 301

E et F sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies p et n munis de bases $\mathcal{B}_E = (e_1, .., e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (v_1, .., v_n)$. Les fonctions étudiées sont définies sur un ouvert Ω de E et à valeurs dans F. Dans la pratique ces espaces seront $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ munis de leurs bases canoniques.

14.1 Propriétés locales

f est une application définie sur un ouvert Ω de E et à valeurs dans F. On notera $f_1, \dots, f_n$ ses applications composantes dans la base $\mathcal{B}_F$.

14.1.1 Applications partielles

14.1.1.1 Applications partielles en un point selon un vecteur

a est un point de Ω , h un vecteur non nul de E.

- ✏ Ω étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r)$ soit incluse dans Ω donc il existe $\delta > 0$ tel que : $t \in [-\delta, \delta] \Rightarrow a + th \in \Omega$. L'ensemble $I_{a,h}$ des réels t pour lesquels $a + th \in \Omega$ est un voisinage de 0 contenant le segment $[-\delta, \delta]$.
- ✏ **DEFINITION**

  L'application partielle de f en a selon h est $f_{a,h} : \begin{pmatrix} I_{a,h} & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & f(a+th) \end{pmatrix}$. Cette fonction donne le comportement de la restriction de f à la droite $\Delta_{a,h} = a + \text{Vect}(h)$ au voisinage de a : $\forall t \in I_{a,h},\ f_{|\Delta_{a,h}}(a + th) = f_{a,h}(t)$.

- ✏ **DEFINITION**

  f est dite **partiellement continue en a selon h** si et seulement si $f_{a,h}$ est continue en 0 (i.e. $f_{|\Delta_{a,h}}$ est continue au point a, c'est à dire aussi $f(x)$ a pour limite $f(a)$ lorsque x tend vers a en restant dans $\Delta_{a,h}$).

- ✏ f est partiellement continue en a selon h ssi les n applications composantes de f le sont.
- ✏ **DEFINITION**

  f est dite **dérivable en a selon le vecteur h** si et seulement si $f_{a,h}$ est dérivable en 0. On note alors $D_h f(a) = f'_{a,h}(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + th) - f(a)}{t}$.

- ✏ f est dérivable en a selon h ssi les n applications composantes de f le sont et $D_h f(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} D_h f_i(a).v_i$ (les fonctions composantes des dérivées selon h sont les dérivées selon h des fonctions composantes).

14.1.1.2 Dérivées partielles (en un point selon une variable)

- ✏ $\mathcal{B}_E = (e_1, .., e_p)$ est une base de E donc l'application $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x = x_1e_1 + \dots + x_pe_p \end{pmatrix}$ est un isomorphisme. $\Omega' = \varphi^{-1}(\Omega)$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et on associe à f la fonction $\bar{f}$ définie sur Ω' par : $\bar{f}((x_1, \dots, x_p) = f(x_1e_1 + \dots + x_pe_p)$ (on a donc $\bar{f} = f \circ \varphi$).
- ✏ Si $a = a_1e_1 + \dots + a_pe_p = \varphi(a_1, \dots, a_p)$ et si h est un des vecteurs e_j de la base $\mathcal{B}_E$: pour $t \in I_{a,h}$, on a $f_{a,e_j}(t) = f(a + te_j) = \bar{f}(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_p)$ cela revient donc à fixer les variables autres que x_j à la valeur qu'elles ont au point a et à laisser varier seulement la variable x_j. On parle dans ce cas de continuité ou de dérivabilité de f en a selon la variable x_j

✏ **DEFINITION**

on dira que f **est partiellement dérivable en a selon la variable x_j** si f est dérivable en a selon le vecteur e_j, et on notera $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a) = D_{e_j} f(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+te_j) - f(a)}{t}$

✏ f est partiellement dérivable en a selon x_j si et seulement si ses composantes $f_1 \ldots, f_n$ le sont et on a dans ce cas $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).v_i$

✏ **Remarque** : $\dfrac{1}{t}(f(a+te_j) - f(a)) = \dfrac{1}{t}\left(\bar{f}(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_p) - \bar{f}(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1},\right.$
Si on pose $g : u \to \bar{f}(a_1, \ldots, a_{j-1}, u, a_{j+1}, \ldots, a_p)$ (on fixe les variables autres que x_j en leur donnant les valeurs qu'elles ont au point a, et on laisse varier la j^o variable).
On a $\dfrac{1}{t}(f(a+te_j)-f(a)) = \dfrac{1}{t}(g(a_j+t)-g(a_j))$. Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ existe si et seulement si g est dérivable en a_j et alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = g'(a_j)$.

14.1.2 Continuité

✏ **DEFINITION**

f est continue en $a \in \Omega$ ssi : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in E, \ x \in B(a, \eta) \cap \Omega \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$.

✏ f est continue en a si et seulement si ses n applications composantes le sont.

✏ **Rappel** : si f est continue en a, alors f est partiellement continue en a selon tout vecteur non nul h, mais la réciproque est fausse.

14.1.3 Différentiabilité en un point

14.1.3.1 Rappel

Dans ce paragraphe, f est fonction d'une seule variable (i.e. $E = \mathbb{R}$).

✏ f dérivable en a équivaut à : f a un développement limité au point a à l'ordre 1 : $f(a+u) = f(a) + uf'(a) + o(u)$.

✏ Toute application linéaire L de $\mathbb{R}$ vers F est caractérisée par le vecteur $L(1)$ car le réel 1 constitue à lui seul une base de $\mathbb{R}$: $\forall u \in \mathbb{R}, \ \ L(u) = L(u.1) = uL(1)$

✏ f est donc dérivable en a si et seulement si il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ telle que : $f(a+u) = f(a) + L(u) + o(u)$. Cette application L est alors unique et caractérisée par $L(1) = f'(a)$.

On revient dans la suite au cas général : f définie sur Ω ouvert de E, et à valeurs dans F.

14.1.3.2 Définitions

✏ Soit $a \in \Omega$, Ω étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$ et donc : $u \in B(0, r) \Rightarrow a + u \in \Omega$. L'ensemble D_a des vecteurs u pour lesquels $a + u \in \Omega$ (et donc $f(a+u)$ est bien défini) est un voisinage de 0 qui contient $B(0, r)$.

✏ **DEFINITION**

f est dite **différentiable au point $a \in \Omega$** si et seulement si il existe une application linéaire $L : E \to F$ telle que : $\forall u \in D_a$, $f(a+u) = f(a) + L(u) + o(u)$, ce qui signifie $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}} \dfrac{N_F(f(a+u) - f(a) - L(u))}{N_E(u)} = 0$

✏ DEFINITION

Si f est différentiable au point a, $f(a+u) = f(a)+L(u)+o(u)$ s'appelle **développement limité** de f au point a à l'ordre 1.

✏ PROPRIETE

Soit f une application de $\Omega \subset E$ vers F. On note $f_1, \ldots, f_n$ ses applications composantes dans la base $\mathcal{B}_F$ de F. Soit $a \in \Omega$. Alors f est différentiable au point a si et seulement si toutes les applications composantes f_j sont différentiable au point a.

14.1.3.3 Analyse de la notion de différentiabilité en un point

✏ PROPRIETE

Si f est différentiable au point a, alors elle est continue au point a.

✏ PROPRIETE

Si f est différentiable au point a, alors elle est dérivable en a selon tout vecteur $h \neq 0$ et $D_h f(a) = L(h)$

✏ PROPRIETE

Si f est différentiable en a, nécessairement f possède au point a une dérivée partielle selon chacune de ses variables et L est nécessairement l'unique application linéaire donnant pour image de la base $(e_1, \ldots, e_p)$ le système $(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a))$

✏ PROPRIETE - DEFINITION

Si l'application linéaire L existe, elle est unique, on la nomme différentielle de f au point a (ou application linéaire tangente à f au point a) et on la note $df(a)$.
On note $df(a).u$ l'image d'un vecteur u de E par $df(a)$ (c'est un vecteur de F).

✏ Si f est différentiable en a, alors : $\forall j \in [\![1, p]\!]\,,\ \ \forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ existe et $df(a)$ est l'application linéaire dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}_E = (e_1, .., e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (v_1, .., v_n)$ a pour terme général $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

14.1.3.4 Exemples

✏ Si $E = \mathbb{R}$, f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a avec de plus $\forall u \in \mathbb{R},\ \ df(a).u = u.f'(a)$.

✏ Si f est une fonction constante, f est différentiable en tout point a de E et $df(a)$est l'application linéaire nulle.

✏ Si f est une application linéaire (ou la restriction à l'ouvert Ω d'une application linéaire) , alors f est différentiable en tout point a de E et $df(a) = f$.

✏ En particulier, pour tout $j \in [[1, p]]$, la forme linéaire : $\varphi_j : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = x_1e_1 + \ldots + x_pe_p & \longmapsto & x_j \end{pmatrix}$ est différentiable en tout point a et $d\varphi_j(a) = \varphi_j$. Cette forme linéaire est notée dx_j (notation différentielle).

14.1.3.5 Matrice Jacobienne

On suppose que f est différentiable au point a.

✏ **DEFINITION**

On appelle **matrice Jacobienne de f au point a** dans les bases (e_j) et (v_i) la matrice dans ces bases de $df(a)$. On a donc $Jf(a) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$

✏ En particulier, si $n = 1$ (f est à valeurs dans $\mathbb{R}$) :

- $df(a)$ est une forme linééaire, la matrice Jacobienne est une matrice ligne : $(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)\dots\dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a))$.
- Si $u \in E$, $u = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} u_j e_j$, $df(a).u = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).u_j$
- Or avec la notation différentielle, on a : $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $u_j = dx_j(u)$, donc $\forall u \in E$, $df(a).u = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).dx_j(u) = (\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).dx_j)(u)$. La forme linéaire $df(a)$ est donc combinaison linéaire des formes linéaires $dx_1, \dots, dx_p$: $df(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).dx_j$.

14.1.3.6 Vecteur Gradient

On suppose que f est différentiable au point a et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que E est euclidien et que la base $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée.

✏ **PROPRIETE Représentation des formes linéaires**

- **Pour tout $b \in E$, l'application notée $(b|.) : x \to (b|x)$ est une forme linéaire (un élément de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ le dual de E).**
- **L'application $s : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E^* \\ b & \longmapsto & (b|.) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme : pour toute forme linéaire φ définie sur l'espace euclidien E, il existe un unique vecteur $b \in E$ tel que : $\forall x \in E,\ \ \varphi(x) = (b|x)$.**

✏ **DEFINITION Vecteur Gradient**

- Si $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ est différentiable au point a, le **gradient** de f en a, noté $\nabla f(a)$ est l'unique vecteur de E tel que $df(a) = (\nabla f(a)|.)$ c'est à dire :
$\forall u \in E,\ \ D_u(f)(a) = df(a).u = (\nabla f(a)|u)$.
- Ce vecteur est $\nabla f(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).e_j$.

Remarque Si $\nabla f(a)$ est non nul, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.
En effet d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si h est un vecteur unitaire, on a $D_h(f)(a) = \big(\nabla f(a)\big|h\big) \leqslant \|\nabla f(a)\|$ avec égalité si et seulement si $\nabla f(a)$ et h sont positivement colinéaires.

✏ **PROPRIETE**

Si f est différentiable en a et si $df(a)$ n'est pas la forme linéaire nulle, $df(a)$ a un maximum sur la sphère unité de $(E, \|\ \|)$, atteint en $u = \dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$

14.2 Propriétés globales

14.2.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

14.2.1.1 Fonctions différentiables

✏ **DEFINITION**

$f : \Omega \subset E \to F$ est **différentiable sur Ω** lorsque $\forall a \in \Omega$, f est différentiable au point a.

✏ **DEFINITION**

Si $f : \Omega \subset E \to F$ est différentiable, **sa différentielle** est l'application df : $\begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ a & \longmapsto & df(a) \end{pmatrix}$.

✏ **PROPRIETE**

Si f, différentiable sur l'ouvert Ω, a un extremum local en $a \in \Omega$, alors a est un point critique de f.

14.2.1.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

✏ **DEFINITION**

$f : \Omega \subset E \to F$ **est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω** lorsque f est différentiable sur Ω et df est continue sur Ω.

✏ **DEFINITION Définition équivalente**

$f : \Omega \subset E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω lorsque f est différentiable sur Ω et $a \to Jf(a)$ est continue sur Ω.

✏ $f : \Omega \subset E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω lorsque f est différentiable sur Ω et les $n \times p$ applications $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) sont définies et continues sur Ω.

✏ **Exemple** : si f est une application constante ou la restriction à Ω d'une application linéaire de E dans F, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

✏ **PROPRIETE (Admis)**

Si $f : \Omega \subset E \to F$ et si les $n \times p$ applications $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) sont définies et continues sur Ω, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

14.2.1.3 Propriétés

✏ **PROPRIETE Linéarité**

- **L'ensemble des fonctions différentiables en a (respectivement différentiables sur Ω) est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et l'application $f \to df(a)$ est linéaire.**
- **L'ensemble $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et à valeurs dans F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et, $\forall a \in \Omega$, l'application $\begin{pmatrix} \mathcal{C}^1(\Omega,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ f & \longmapsto & df(a) \end{pmatrix}$ est linéaire.**

✏ **PROPRIETE Composition par bilinéarité**

si G et H sont deux espaces sur $\mathbb{R}$, de dimensions finies, (tout comme E et F), si B est une application bilinéaire de $F \times G$ dans H et $f : \Omega \subset E \to F$ et $g : \Omega \subset E \to G$.

* **Si f et g sont différentiables en $a \in \Omega$ (respectivement différentiables sur Ω), alors $B(f, g)$ est différentiable en a (respectivement sur Ω) et $dB(f, g)(a)$ est l'application linéaire définie par :**
  $\forall h \in E, dB(f, g)(a).h = B(df(a).h, g(a)) + B(f(a), dg(a).h)$.
* **Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$ et $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, G)$, alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^1(\Omega, H)$.**

✏ **PROPRIETE Composition par multilinéarité**

si F_1, F_2, ..., F_p et H sont des espaces sur $\mathbb{R}$, de dimensions finies, (tout comme E et F), si M est une application $p-$linéaire de $F_1 \times \cdots \times F_n$ dans H et, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f_i : \Omega \subset E \to F_i$.

* **Si f_1, ..., f_p sont différentiables en $a \in \Omega$ (respectivement différentiables surΩ), alors $M(f_1, \ldots, f_p)$ est différentiable en a (respectivement sur Ω) et $dM(f_1, \ldots, f_p)(a)$ est l'application linéaire de E vers H définie par :**
  $\forall h \in E, dM(f_1, \ldots, f_p)(a).h = M(df_1(a).h, \ldots, f_p(a)) + M(f_1(a), df_2(a).h, \ldots, f_p(a)) + \cdots + M(f_1(a), \ldots, df_p(a).h)$.
* **Si les f_i sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, c'est aussi le cas pour $M(f_1, \ldots, f_p)$**

14.2.1.4 Composition des fonctions différentiables ou de classe $\mathcal{C}^1$

✏ **PROPRIETE Différentielle d'une composée**

si $f : \Omega \subset E \to F$ et $g : \Omega' \subset F \to G$ avec $f(\Omega) \subset \Omega'$.

* **Si f est différentiable en $a \in \Omega$ (respectivement sur Ω) et si g est différentiable en $b = f(a)$ (respectivement sur Ω'), alors $h = g \circ f$ est différentiable en a (respectivement sur Ω) et $dh(a) = d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.**
* **Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$, si $g \in \mathcal{C}^1(\Omega', G)$, alors $h = g \circ f \in \mathcal{C}^1(\Omega, G)$.**

✏ **PROPRIETE Jacobienne d'une composée**

Si f est différentiable en a et g en $b = f(a)$ $Jh(a) = J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \times Jf(a)$

✏ **PROPRIETE Dérivation partielle d'une composée, règle de la chaine**

On se limite au cas où g est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (on s'y ramène en considérant les fonctions composantes de g).
Notons $(x_j)_{j \in [1,p]}$ les variables de f, $(f_i)_{i \in [1,n]}$ les fonctions composantes de f, $(y_i)_{i \in [1,n]}$ les variables de g, et $h = g \circ f$.

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \ \frac{\partial h}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)).\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

✏ **PROPRIETE**

En particulier, si $E = \mathbb{R}$, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle Ω de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un ouvert Ω', et si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω', alors $h = g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et : $\forall t \in \Omega, \ h'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(t)) \times f_i'(t)$

✏ **PROPRIETE dérivée le long d'un arc**

Si $f : \Omega \subset E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $\gamma : I \to E$, avec I intervalle de $\mathbb{R}$, est une application dérivable en t_0 telle que $\gamma(I) \subset \Omega$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et $(f \circ \gamma)'(t_0) = df(\gamma(t_0)).\gamma'(t_0)$.

✏ **PROPRIETE**

Si $f : \Omega \subset E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $\gamma : [0,1] \to E$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma([0,1]) \subset \Omega$ avec $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors $f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)).\gamma'(t)dt$.

✏ **Corollaire caractérisation des applications constantes**

si Ω est un ouvert convexe et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, f est constante si et seulement si en tout point a de Ω, $df(a)$ est l'application linéaire nulle.
Nous admettons que ce résultat demeure valable lorsque l'ouvert Ω est seulement connexe par arcs.

Dem.

14.2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$

Soit $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ avec Ω ouvert. On traitera le cas où f est à valeurs dans un espace vectoriel F en se ramenant aux fonctions composantes.

14.2.2.1 Définitions

✏ Rappel : $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ssi les p dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sont définies et continues sur Ω.

✏ **DEFINITION**

f est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si f et ses p dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ c'est à dire si les p^2 applications $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ $((j,k) \in [\![1,p]\!]^2)$ sont définies et continues sur Ω. Pour simplifier, on note $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ et lorsque $j = k$, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$.

✏ **DEFINITION**

Pour $k \geqslant 2$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et si ses p^{k-1} dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^1$ c'est à dire si les p^k applications $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}$ sont définies et continues sur Ω.

✏ **DEFINITION**

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k.

14.2.2.2 Propriétés

✏ **PROPRIETE**

Si $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, l'ensemble $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$ algèbre.

✏ **PROPRIETE**

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{k+1}(\Omega,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\Omega,\mathbb{R})$.

✏ **PROPRIETE**

$\forall j \in [[1,p]]$, $\partial_j : \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{k+1}(\Omega,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x_j} \end{pmatrix}$ est un opérateur linéaire.

✏ **PROPRIETE**

La composée de deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$.

14.2.2.3 Théorème de Schwarz

THEOREME Théorème de Schwarz

- ✏ **Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω , $\forall (i,j) \in [[1,p]]^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (i.e. les opérateurs ∂_i et ∂_j commutent).**
- ✏ **Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^k$, pour toute permutation σ de $[[1,k]]$ et pour tout $(i_1,..,i_k) \in [[1,p]]^k$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}..\partial x_{i_k}} = \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}..\partial x_{i_{\sigma(k)}}}$**

14.3 Exemples d'équations aux dérivées partielles

14.3.1 Changements de variables classiques

14.3.1.1 Changement de variable linéaire

✏ $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y) = (au+bv, cu+dv) \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$ est un isomorphisme. φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$

✏ Si $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{pmatrix}$ et $g = f\circ\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & g(u,v) = f(au+bv, cu+dv) \end{pmatrix}$ alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si g est de classe $\mathcal{C}^2$ et, pour tout (u,v) et $(x,y) = \varphi(u,v)$:

$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = a\frac{\partial f}{\partial x}(au+bv,cu+dv) + c\frac{\partial f}{\partial y}(au+bv,cu+dv)$

$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = b\frac{\partial f}{\partial x}(au+bv,cu+dv) + d\frac{\partial f}{\partial y}(au+bv,cu+dv)$

$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au+bv,cu+dv) + 2ac\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(au+bv,cu+dv) + c^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au+bv,cu+dv)$

$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v) = ab\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au+bv,cu+dv) + (ad+bc)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(au+bv,cu+dv) + cd\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au+bv,cu+dv)$

$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au+bv,cu+dv) + 2bd\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(au+bv,cu+dv) + d^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au+bv,cu+dv)$

14.3.1.2 Changement de variable des coordonnées polaires

✏ $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{pmatrix}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

✏ Si $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{pmatrix}$ et $g = f\circ\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{pmatrix}$ alors, si f est de classe $\mathcal{C}^2$, g est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ et, pour tout (r,θ) et $(x,y) = \varphi(r,\theta)$:

$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)$

$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)$

$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta) + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)$

$\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial \theta}(r,\theta) = -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) - r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta) + r\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) + r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)$

$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta) - 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)$

14.3.2 Application aux équations aux dérivées partielles

14.3.2.1 Exemples du premier ordre

✏ Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \exists h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y) = h(y)$.

✏ Résoudre l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en utilisant un changement de variable linéaire.

✏ Résoudre l'équation $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en utilisant un changement de variable polaire.

14.3.2.2 Exemple du second ordre

✏ Résoudre l'équation des ondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en utilisant un changement de variable linéaire.

14.4 Vecteurs tangents à une partie d'un espace vectoriel

Dans tout ce paragraphe, E est un espace vectoriel réel de dimension finie. Dans la pratique, ce sera le plan $\mathbb{R}^2$ ou l'espace $\mathbb{R}^3$.

14.4.1 Vecteur tangent au support d'un arc

✏ **DEFINITION**

Si I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to E$ est un arc paramétré dérivable en t_0, le vecteur $\gamma'(t_0)$ est dit **vecteur tangent** au point $\gamma(t_0)$ à la partie $\Gamma = \{\gamma(t),\ \ t \in I\}$ de l'espace E. Γ est le **support de l'arc** γ, que l'on appelle communément "courbe".

✏ Si $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to E$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. Si $f : \Omega \subset E \to F$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et si le support Γ de l'arc γ est inclus dans Ω, alors $\delta = f \circ \gamma$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ et : $\forall t \in I,\ \ \delta'(t) = df(\gamma(t)).\gamma'(t)$. En particulier, si le vecteur $\gamma'(t_0)$ n'est pas dans le noyau de $df(\gamma(t_0))$, alors $df(\gamma(t_0)).\gamma'(t_0)$ est vecteur tangent en $\delta(t_0)$ au support Δ de l'arc δ.
Remarquons qu'il suffit que γ soit dérivable en t_0 et f diffŕentiable en $\gamma(t_0)$ pour avoir le résultat.

14.4.2 Vecteur tangent à une partie de E

✏ **DEFINITION**

si $X \subset E$ et $x \in X$, un vecteur $v \in E$ est dit **tangent à X** s'il existe un arc paramétré γ défini sur un voisinage de 0 et dérivable en 0, dont le support Γ est inclus dans X et qui vérifie : $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.
On notera T_xX l'ensemble des vecteurs tangents à X en x

✏ **Remarque** L'ensemble T_xX des vecteurs tangents à X en x est stable par homothétie : si $v \in T_xX$, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et γ arc de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ vers X tel que $\gamma'(0) = v$, alors l'application $t \mapsto \gamma(\lambda t)$ est définie sur un voisinage de 0 , à valeurs dans X et dérivable en 0 de dérivée λv : donc $\lambda v \in T_xX$. On dit que c'est **un cône**
Par contre T_xX n'est pas toujours un sous-espace vectoriel de E : par exemple si $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ xy = 0$
on montre que $T_{(0,0)}X = X$ qui n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

14.4.2.1 Exemples d'ensembles de vecteurs tangents

✏ **PROPRIETE**

Si X est un sous-espace affine de E de direction G, alors pour tout $x \in X$, $T_xX = G$

Dem.

✏ **PROPRIETE**

Si X est une sphère de l'espace euclidien E de centre C et de rayon $R > 0$. Soit $A \in X$. Alors $T_A(X)$ est l'orthogonal de $\overrightarrow{CA}$

Dem.

✏ **PROPRIETE**

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable (ou mieux) , si X est le graphe de f c'est à dire la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par : $X = \{(x,y,z)/(x,y) \in \Omega \text{ et } z = f(x,y)\}$. Les vecteurs tangents à X en $(a,b,c) \in X$ constituent le plan d'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b).x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).y - z = 0$

Dem.

✏ **PROPRIETE**

Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$, avec Ω ouvert de E, et $X = \left\{x \in \Omega \middle| g(x) = 0\right\}$. Si $a \in X$ et $dg(a) \neq 0$. Alors $T_aX = \ker(dg(a))$

Dem.

✏ **Remarque** Une surface de $\mathbb{R}^3$ est une ligne de niveau d'une fonction numérique d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$: le résultat précédent permet d'obtenir l'ensemble des vecteurs tangents en un point à cette surface sous certaines condition

✏ **PROPRIETE - DEFINITION**

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable, on appelle plan tangent au graphe de f en un point (a,b,c) le plan affine d'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b).(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).(y-b) - (z-c) = 0$. C'est le plan passant par (a,b,c) et dirigé par le plan des vecteurs tangents.

Dem.

✏ **PROPRIETE**

Si E est euclidien et $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ est différentiable. Si X est une ligne de niveau de f c'est à dire une partie X de E telle que $f_{|X}$ soit constante, les vecteurs tangents à X en $x \in X$ sont orthogonaux au vecteur gradient $\nabla f(x)$.

Dem.

14.5 Optimisation

14.5.1 Extremum local

Soit $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ avec Ω ouvert.

14.5.1.1 Définitions

✏ **DEFINITION**

$a \in \Omega$ est dit **point critique de f** lorsque f est différentiable au point a et $df(a)$ est la forme linéaire nulle c'est à dire lorsque : $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$ ou encore lorsque $\nabla f(a)$ est le vecteur nul ou $Jf(a)$ la matrice ligne nulle.

✏ **DEFINITION**

f présente au point $a \in \Omega$ un **minimum local** lorsque : il existe un voisinage V de a inclus dans Ω tel que : $\forall x \in V,\quad f(x) \geqslant f(a)$.
Ce minimum local est dit **strict** si $x \in V$ et $x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a)$.

✏ **DEFINITION**

f présente au point $a \in \Omega$ un **maximum local** lorsque : il existe un voisinage V de a inclus dans Ω tel que : $\forall x \in V,\quad f(x) \leqslant f(a)$.
Ce maximum local est dit **strict** si $x \in V$ et $x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)$.

14.5.1.2 Théorème d'ordre 1

✏ **PROPRIETE Condition nécessaire d'ordre 1**

Soit $f : \Omega \subset E \to \mathbb{R}$. Si f présente au point a de l'ouvert Ω un extremum local, et si f est différentiable au point a, alors a est un point critique de f.

✏ **La réciproque est fausse** : $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ peut avoir un point critique sans extremum local. C'est le cas par exemple pour

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

14.5.1.3 Etude au second ordre

Dans ce paragraphe, on considère des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

✏ **DEFINITION Hessienne**

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω. Soit $a \in \Omega$.
On appelle **matrice hessienne de f en a** la matrice notée $H_f(a)$ suivante :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

✏ **Remarque** : D'après le théorème de Schwarz, la matrice hessienne est symétrique.

✏ **PROPRIETE Formule de Taylor-Young à l'ordre 2**

Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$. Alors on a au voisinage de 0 :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a).h | h \rangle + \circ\left(\|h\|^2\right)$$

On peut aussi écrire ce DL sous la forme : $f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + h^\top \nabla f(a) + \dfrac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \circ\left(\|h\|^2\right)$

Dem.

✏ **PROPRIETE Condition nécessaire d'extremum d'ordre 2**

Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$. On suppose que f admet un minimum local en a. Alors a est un point critique de f et la matrice hessienne de f en a est symétrique positive : $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Dem.

✏ **Remarque** Si f admet un maximum local en a, alors la matrice hessienne de f en a est symétrique négative

✏ **PROPRIETE Condition suffisante d'extremum d'ordre 2**

Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$ un point critique de f. On suppose que $H_f(a)$ est définie positive (i.e. $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).
Alors f admet un minimum local strict en a.

Dem.

✏ **PROPRIETE cas particulier des fonctions de deux variables réelles**

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$ un point critique de f. Alors :

- ✔ **Si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\operatorname{tr}(H_f(a)) > 0$, alors f admet un minimum local strict en a**
- ✔ **Si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\operatorname{tr}(H_f(a)) < 0$, alors f admet un maximum local strict en a**
- ✔ **Si $\det(H_f(a)) < 0$ alors f n'admet pas d'extremum local en a**

Dem.

14.5.2 Optimisation sous contrainte

On peut être amené à chercher les extrema d'une fonction numérique définie sur une partie X d'intérieur non vide. Par exemple quand on veut chercher le minimum d'une fonction f sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, on cherche à minimiser f sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

✏ **PROPRIETE**

Soit f une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit X une partie de Ω. Soit $a \in X$. Si la restriction de f à X admet un extremum local en a et si f est différentiable en a, alors $df(a)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en a

Dem.

✏ **THEOREME Optimisation sous contrainte**

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$.
On pose $X = \left\{x \in \Omega \middle| g(x) = 0\right\}$.
Si $f_{|X}$ admet un extremum local en un point $a \in X$ et si $dg(a) \neq 0$, alors $df(a)$ est colinéaire à $dg(a)$

Dem.

Solution

Changements de variables classiques

Changement de variable linéaire

✏ $\varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y) = (au+bv, cu+dv) \end{array}\right)$ avec $ad - bc \neq 0$ est un isomorphisme. φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$

✏ Si $f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}\right)$ et $g = f \circ \varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & g(u,v) = f(au+bv, cu+dv) \end{array}\right)$ alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si g est de classe $\mathcal{C}^2$ et, pour tout (u,v) et $(x,y) = \varphi(u,v)$:

$\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = a\dfrac{\partial f}{\partial x}(au+bv, cu+dv) + c\dfrac{\partial f}{\partial y}(au+bv, cu+dv)$

$\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = b\dfrac{\partial f}{\partial x}(au+bv, cu+dv) + d\dfrac{\partial f}{\partial y}(au+bv, cu+dv)$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = a^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au+bv, cu+dv) + 2ac\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(au+bv, cu+dv) + c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au+bv, cu+dv)$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = ab\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au+bv, cu+dv) + (ad+bc)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(au+bv, cu+dv) + cd\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au+bv, cu+dv)$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = b^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au+bv, cu+dv) + 2bd\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(au+bv, cu+dv) + d^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au+bv, cu+dv)$

Changement de variable des coordonnées polaires

✏ $\varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

✏ Si $f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}\right)$ et $g = f \circ \varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}\right)$ alors, si f est de classe $\mathcal{C}^2$, g est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ et, pour tout (r,θ) et $(x,y) = \varphi(r,\theta)$:

$\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + 2\cos\theta\sin\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}(r,\theta) = -\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) - r\cos\theta\sin\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\sin\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) - r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r^2\sin^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) - 2r^2\cos\theta\sin\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r^2\cos^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)$

14.6 Complément

14.6.1 Caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

:

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie p muni d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, .., e_p)$. Soit f définie sur un ouvert Ω de E et à valeurs dans $\mathbb{R}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si et seulement si les p fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j \in [[1, p]]$ sont définies et continues sur Ω.

Preuve
Condition nécessaire : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors f est différentiable en tout point a de Ω donc les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j \in [[1, p]]$ sont définies en tout point a de Ω. De plus l'application $df : a \to df(a)$ est continue sur Ω, donc les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j \in [[1, p]]$ qui sont ses composantes dans la base $(dx_1, \ldots, dx_p)$ sont continues.
Condition suffisante On suppose que les p fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j \in [[1, p]]$ de la fonction f sont définies et continues sur Ω.

Première étape : montrons que f est différentiable en tout point a de Ω i.e. f a en tout point a de Ω un développement limité à l'ordre 1.

Soit $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$. On sait que nécessairement la différentielle de f en a, si elle existe, est la forme linéaire $L = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j$.
Il suffit donc de montrer que cette forme linéaire L permet bien d'écrire un développement limité : $f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h)$.

On note $a = a_1e_1 + .. + a_pe_p$ et $h = h_1e_1 + .. + h_pe_p$ choisi de norme inférieure à r. On note pour tout k de $[[1, p]]$, $u_k = h_ke_k + .. + h_pe_p$ et $u_{p+1} = 0$ (remarque : $u_1 = h$).

On a donc $f(a + h) - f(a) = f(a + u_1) - f(a + u_{p+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} f(a + u_k) - f(a + u_{k+1})$ et par conséquent, $f(a + h) - f(a) - L(h) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} f(a + u_k) - f(a + u_{k+1}) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).h_k$.
Pour tout k de $[[1, p]]$, $f(a + u_k) - f(a + u_{k+1}) = f(a + u_{k+1} + h_ke_k) - f(a + u_{k+1})$ est un accroissement de la fonction partielle de f au point $a + u_{k+1}$ selon le vecteur e_k.
La fonction $\varphi_k : t \to f(a + u_{k+1} + th_ke_k)$ est dérivable sur le segment $[0, 1]$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $t_k \in [0, 1]$ tel que $\varphi_k(1) - \varphi_k(0) = (1 - 0)\varphi_k'(t_k)$ c'est à dire : $f(a + u_k) - f(a + u_{k+1}) = h_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a + u_{k+1} + t_kh_ke_k)$.

On a alors : $f(a+h) - f(a) - L(h) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \{\frac{\partial f}{\partial x_k}(a + u_{k+1} + t_kh_ke_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\}.h_k$, et avec pour norme N la norme du sup : $\mid f(a + h) - f(a) - L(h) \mid \leqslant A(h).N(h)$ où A est définie par $A(h) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mid \frac{\partial f}{\partial x_k}(a + u_{k+1} + t_kh_ke_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)) \mid$. Lorsque h tend vers 0 les vecteurs $u_{k+1} + t_kh_ke_k$ tendent vers 0 (t_k est borné, toutes les composantes h_j tendent vers 0) donc, pour tout k, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a + u_{k+1} + t_kh_ke_k) - \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ tend vers 0 (continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ en a). A a donc pour limite 0 lorsque h tend vers 0 ce qui entraîne que $f(a+h)=f(a)+L(h)+o(h)$ i.e. f est différentiable en a et $df(a)=L$.

Deuxième étape : montrons que $a\to df(a)$ est continue en tout point a de Ω

On sait que : $\forall a\in\Omega,\quad df(a)=\sum_{j=1}^{p}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)dx_j$. Cela signifie que les p fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j\in[[1,p]]$ sont les fonctions composantes de la fonction $a\to df(a)$ dans la base $(dx_1,\dots,dx_p)$ du dual de E. Comme ces fonctions sont continues sur Ω, la fonction $a\to df(a)$ est continue sur Ω.

14.6.2 Composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

:

Si $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,F)$, si $g\in\mathcal{C}^1(U,G)$ et si $f(\Omega)\subset U$, alors la composée $h=g\circ f:\Omega\subset E\ \to G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout point a de Ω on a :

- $dh(a)=d(g\circ f)(a)=dg(f(a))\circ df(a)$ Soit, en représentant les différentielles par les matrices jacobiennes :
- $Jh(a)=J(g\circ f)(a)=Jg(f(a))\times Jf(a)$ C'est à dire, en identifiant terme à terme les matrices ci-dessus et en notant $(x_j)_{j\in[[1,p]]}$ les variables de f, $(f_i)_{i\in[[1,n]]}$ les fonctions composantes de f, $(y_i)_{i\in[[1,n]]}$ les variables de g, $(g_k)_{k\in[[1,q]]}$ les composantes de g et $(h_k)_{k\in[[1,q]]}$ celles de h :
- $\forall k\in[[1,q]],\ \forall j\in[[1,p]],\ \dfrac{\partial h_k}{\partial x_j}(a)=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial g_k}{\partial y_i}(f(a)).\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$

Preuve : Fixons $a\in\Omega$, $j\in[[1,p]]$ (n^o de variable) et $k\in[[1,q]]$ (n^o de fonction composante). On s'intéresse à la dérivation partielle de h_k en a selon x_j c'est à dire à la dérivabilité en 0 de $\gamma:t\to h_k(a+te_j)$. ⊙ $\forall t\neq 0,\ \delta(t)=\dfrac{1}{t}(\gamma(t)-\gamma(0))=\dfrac{1}{t}\{h_k(a+te_j)-h_k(0)\}=\dfrac{1}{t}\{g_k(f(a+te_j))-g_k(f(a))\}$.

⊙ f étant de classe $\mathcal{C}^1$, elle a un développement limité en a et donc : $f(a+te_j)=f(a)+df(a)[te_j]+t\varepsilon(t)=f(a)+t\{df(a)[ej]+\varepsilon(t)\}=f(a)+u(t)$ où ε et u sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans F ayant une limite nulle en 0 et $u(t)=O(t)$. ⊙ g_k étant de classe $\mathcal{C}^1$, elle a un développement limité en $f(a)$ donc :

$t\delta(t)=g_k(f(a)+u(t))-g_k(f(a))=dg_k(f(a))[u(t)]+o(u(t))$
$=dg_k(f(a))[t\{df(a)[ej]+\varepsilon(t)\}]+o(u(t))$
$=t.dg_k(f(a))\{df(a)[ej]\}+o(t)$

conclusion : δ a une limite en 0 qui vaut $dg_k(f(a))\{df(a)[ej]\}$ c'est à dire que $\dfrac{\partial h_k}{\partial x_j}(a)$ existe et vaut $dg_k(f(a))\{df(a)[ej]\}=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial g_k}{\partial y_i}(f(a)).\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

$\dfrac{\partial h_k}{\partial x_j}$ est donc définie et continue sur Ω en tant que somme, produit et composée de fonctions continues.
Ceci étant valable pour tout $(j,k)\in[[1,p]]\times[[1,q]]$, h est de classe C^1 sur Ω et la formule $\forall k\in[[1,q]]$, $\forall j\in[[1,p]],\ \dfrac{\partial h_k}{\partial x_j}(a)=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial g_k}{\partial y_i}(f(a)).\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ montre que la matrice Jacobienne de h en a est le produit des Jacobiennes de g en $f(a)$ et de f en a soit encore $dh(a)=dg(f(a))\circ df(a)$.

Demonstration de : si Ω est un ouvert connexe par arc et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, f est constante si et seulement si en tout point a de Ω, $df(a)$ est l'application linéaire nulle.

On fixe $a \in A$ et on pose $A = x \in \Omega | f(x) = f(a)$ $A = x \in \Omega | f(x) = f(a)$
On montre A fermé car c'est $f^{-1}(f\{a\})$ et f continue On montre A ouvert. En effet si $x \in A$, il existe une boule de centre x et de rayon R incluse dans Ω qui est ouvert, et donc comme sur cette boule, qui est convexe, la différentielle de f est nulle, f est cste sur cette boule d'après le résultat établi sur les parties convexes. et donc la boule est dans A : A est un voisinage de chacun de ses points : A ouvert.
On montre alors que A est égal à Ω. Par l'absurde si A n'est pas égal à Ω. Soit x un point de égal à $\Omega \setminus A$ Par connexité par arc, il existe un chemin entre a et x dans Ω, $\gamma : [0,1] - > \Omega$, continu tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = x$ On considere $\{t \in [0,1] | \gamma(t) \in A\}$. C'est une partie fermée de $[0,1]$ donc il atteint un maximum : α Comme $\gamma(1)$ n'est pas dans A, $\alpha < 1$. Mais $\gamma(\alpha)$ est un point de Ω donc il existe $r > 0$ tel que la boule de centre $\gamma(\alpha)$ et de rayon r soit dans A qui est ouvert.
Par continuité de γ, il existe $\delta > 0$ et suffisamment petit pour que $\alpha + \delta < 1$, tel que si $t \in [\alpha, \alpha + \delta], \gamma(t) \in B(\gamma(\alpha), r)$. Et en particulier $\alpha + \delta$ est dans $\{t \in [0,1] | \gamma(t) \in A\}$ ce qui contredit le caractère maximal de α