Programme de Colle - Semaine n^o 20

Du 11 mars 2024 au 15 mars 2024

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él 'eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**.
Remarque : La note pour un membre du groupe B ne pourra pas dépasser 14
ATTENTION : A partir de cette semaine deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte $\sim$ 5 min) d'ordre pratique ou un énoncé précis d'un résultat du cours + une question de cours usuelle (Démo ou exo Banque CCP) pour chaque élève des deux groupes.

Questions courtes (~ 10 min) d'ordre pratique pour tous les élèves

une isométrie ou une équation différentielle

Reconnaitre l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

1. $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & -4 & 3 \\ -4 & -3 & 12 \\ 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}$
   A est la matrice de la réflexion d'axe le plan d'équation $x + 4y - 3z = 0$
2. $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
   A est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$ (bijection réciproque de la matrice de l'exercice 2)
3. $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
   A est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   A est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$

Résoudre l' équation différentielle suivante :

1. $y" + 2y' + y = \operatorname{ch} x$
   $x \to \dfrac{\operatorname{ch}(x) + x^2 e^{-x}}{4} + (Ax + B)e^{-x}$
2. $x" + 5x' + 4x = e^{-2t} \sin t.$
   $t \mapsto -\dfrac{\cos t + 3 \sin t}{10} e^{-2t} + Ae^{-t} + Ae^{-4t}$

Cours

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

- ✏ Produit scalaire. Norme euclidienne (ou pré-hilbertienne)
- ✏ Propriétés : identité de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski

Orthogonalité

- ✏ Famille orthogonale, famille orthonormale
- ✏ Orthonormalisation de Schmidt
- ✏ Expressions dans une base orthonormale d'un espace euclidien
- ✏ Orthogonalité de parties d'un espace pré-hilbertien
- ✏ Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.
- ✏ Projections et symétries orthogonales.
- ✏ Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie

Endomorphismes d'un espace euclidien

Adjoint d'un endomorphisme

- ✏ Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien
- ✏ Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien
- ✏ Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint
- ✏ Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée.
- ✏ Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*

Isométries vectorielles

- ✏ Isométrie vectorielle d'un espace euclidien
- ✏ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable
- ✏ Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale
- ✏ Réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.

Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

- ✏ Endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) d'un espace euclidien
- ✏ Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs autoadjoints
- ✏ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable
- ✏ Théorème spectral : si u est un endomorphisme autoadjoint, u est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) en base orthonormale.
- ✏ Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Définition et carctérisation à l'aide du spectre.
- ✏ Traduction matricielle

Equations différentielles linéaires

Révision des chapitres vus en MPSI

- ✏ Équation : $y' + a(t)y = b(t)$ avec a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$
- ✏ Équation : $y'' + ay' + by = c(t)$ avec a et b deux constantes de $\mathbb{K}$ et c combinaison linéaire de fonctions du type : $t \mapsto e^{\alpha t}P(t)$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et P polynôme.

Equation différentielle linéaire scalaire du premier ordre

- ✏ Equations résolues en y' : Solutions de l'équation (E_H), solutions de (E), théorème de Cauchy.
- ✏ Equations non résolues en y' : problemes de raccord.

Equation différentielle linéaire du premier ordre

- ✏ Théorême de Cauchy (admis).
- ✏ Solutions de $x' = a(t)(x)$. Systême fondamental de solutions
- ✏ Solutions de $x' = a(t)(x) + b(t)$. Méthode de variation des constantes.
- ✏ Cas particulier des équations à coefficients constants

Exercices et questions de cours

1. **TOUS** Espérance, variance, fonction génératrice des lois usuelles (une ou deux par élève...)
2. **TOUS** Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre : $y' + a(t)y = b(t)$

3. Inégalité de Boole (ou sous-additivité)
4. **Groupe B** Inégalité de Markov
5. **Groupe B** Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
6. **TOUS** Variance d'une somme de v.a.r.d. indépendantes

7. **TOUS** Théorème de la projection orthogonale (distance entre entre un point et un s.e.v. de dimension finie est atteinte)
8. **TOUS Banque 76**
   Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
   On pose $\forall\, x \in E,\ ||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
   (a) i. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   ii. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
   (b) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.
9. **TOUS Banque CCP MP 77**
   Soit E un espace euclidien.
   (a) Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
   (b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   i. Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   ii. Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
10. **Banque CCP 63**
   Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$. On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
   Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.
   (a) Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E, \big(u(x)\big|x\big) = 0$ est-il forcément l'endomorphisme nul ?
   (b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$
   ii. $\forall (x,y) \in E^2, \big(u(x)\big|u(y)\big) = \big(u^*(x)\big|u^*(y)\big)$
   iii. $\forall x \in E, \big\|u(x)\big\| = \big\|u^*(x)\big\|$
11. **TOUS** Parmi les projecteurs, caractérisation des projecteurs orthogonaux par l'inégalité $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$
12. **TOUS** Parmi les projecteurs, caractérisation des projecteurs orthogonaux par le relation
$$\forall (x,y) \in E^2, \big\langle p(x)\big|y\big\rangle = \big\langle x\big|p(y)\big\rangle$$
13. **Banque CCP 80**
   Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
   (b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.
14. **Banque 81**
   On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi\left(A, A'\right) = \mathrm{tr}\left({}^t A A'\right)$, où $\mathrm{tr}\left({}^t A A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^t A$ par la matrice A'.
   On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On note $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

   (a) Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

(c) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

(d) Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

15. **TOUS Banque CCP 66**

(a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Prouver que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$

(b) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

(c) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), AB = BA \Longrightarrow A^2B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

(d) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$

16. **TOUS** Résoudre $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$. Y-a-til des solutions sur $\mathbb{R}$

17. Résoudre $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$

18. **TOUS Banque CCP 74**

(a) On considÃ¨re la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

ii. Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

(b) On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Prochain programme : **Équations différentielles**

GROUPES DE COLLES

Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles
G 2 : Breton , **G 4** : Arar , Munir , **G 5** Le Bris , **G 6** Ribes , **G 7** Queinnec
G 8 Niangoran, Polydore , **G 9** Verdin , **G 10** Jayad , Laurent, Clautrier ,
G 12 Dathevy , Auger , **G 13** Foulon , **G 14** Plessis, Varennes , **G 15** Briard, Denizot
Groupe A : les autres