

Programme de Colle - Semaine n° 21

Du 18 mars 2024 au 22 mars 2024

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.

Pour le premier groupe, appelé "**Groupe A**", les questions de cours intégreront toutes les questions de cours sauf celles notées "**B**".

Le second groupe, appelé "**Groupe B**", les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**.

Remarque : La note pour un membre du groupe B ne pourra pas dépasser 14

Remarque : Les questions "courtes" ayant représenté une trop grande perte de temps pendant les colles précédentes, elles sortent du programme de colle. A partir de cette semaine une seule question de "cours" sera posée aux élèves.

Cours

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

- ⇒ Produit scalaire. Norme euclidienne (ou pré-hilbertienne)
- ⇒ Propriétés : identité de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski

Orthogonalité

- ⇒ Famille orthogonale, famille orthonormale
- ⇒ Orthonormalisation de Schmidt
- ⇒ Expressions dans une base orthonormale d'un espace euclidien
- ⇒ Orthogonalité de parties d'un espace pré-hilbertien
- ⇒ Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.
- ⇒ Projections et symétries orthogonales.
- ⇒ Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie

Endomorphismes d'un espace euclidien

Adjoint d'un endomorphisme

- ⇒ Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien
- ⇒ Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien
- ⇒ Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint
- ⇒ Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée.
- ⇒ Si le sous-espace F est stable par u , alors F^\perp est stable par u^*

Isométries vectorielles

- ⇒ Isométrie vectorielle d'un espace euclidien
- ⇒ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable
- ⇒ Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale
- ⇒ Réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.

Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

- ⇒ Endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) d'un espace euclidien
- ⇒ Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs autoadjoints
- ⇒ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable
- ⇒ Théorème spectral : si u est un endomorphisme autoadjoint, u est diagonalisable (sur \mathbb{R}) en base orthonormale.
- ⇒ Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Définition et caractérisation à l'aide du spectre.
- ⇒ Traduction matricielle

Equations différentielles linéaires

Révision des chapitres vus en MPSI

- ⇒ Équation : $y' + a(t)y = b(t)$ avec a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K}
- ⇒ Équation : $y'' + ay' + by = c(t)$ avec a et b deux constantes de \mathbb{K} et c combinaison linéaire de fonctions du type : $t \mapsto e^{\alpha t}P(t)$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et P polynôme.

Equation différentielle linéaire scalaire du premier ordre

- ⇒ Equations résolues en y' : Solutions de l'équation (E_H) , solutions de (E) , théorème de Cauchy.
- ⇒ Equations non résolues en y' : problèmes de raccord.

Equation différentielle linéaire du premier ordre

- ⇒ Théorème de Cauchy (admis).
- ⇒ Solutions de $x' = a(t)(x)$. Système fondamental de solutions
- ⇒ Solutions de $x' = a(t)(x) + b(t)$. Méthode de variation des constantes.
- ⇒ Cas particulier des équations à coefficients constants

Equations différentielles scalaires d'ordre n

- ⇒ Equivalence à un système. Structure de l'ensemble des solutions
- ⇒ Equations différentielles du second ordre résolues en y'' : résolution, méthode de Lagrange, méthode de variation des constantes, cas particulier des équations à coefficients constants
- ⇒ Exemple de résolution de $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$

Calcul différentiel

- ⇒ Dérivée selon un vecteur.
- ⇒ Dérivées partielles
- ⇒ Application différentiable en un point.
- ⇒ Unicité/définition de l'application différentielle en un point en cas de différentiabilité.
- ⇒ Coordonnées de l'application différentielle en un point, gradient (notation $\nabla f(a)$)

Exercices et questions de cours

1. **TOUS** Théorème de la projection orthogonale (distance entre un point et un s.e.v. de dimension finie est atteinte)
2. **TOUS** Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre : $y' + a(t)y = b(t)$
3. **TOUS Banque 76**

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

- (a) i. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- ii. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

- (b) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

4. **Banque CCP 63**

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(|)$. On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Pour tout endomorphisme u de E , on note u^* l'adjoint de u .

- (a) Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$ est-il forcément l'endomorphisme nul ?
- (b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
- $u \circ u^* = u^* \circ u$
 - $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$
 - $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$

5. Banque CCP 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- (a) Démontrer que $(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E .
- (b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

6. TOUS Banque CCP 66

- (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Prouver que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$
- (b) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
- (c) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), AB = BA \implies A^2B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
- (d) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$

7. TOUS Résoudre $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$. Y-a-t-il des solutions sur \mathbb{R} ?

8. TOUS Résolution de $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{1+x^2}$

9. TOUS Résolution de $\begin{cases} x' = 3x - 2y + e^t \\ y' = x + e^t \end{cases}$

10. Résoudre $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 2e^t \\ y' = 4x - 3y + e^t \\ z' = -2x + y - 1 \end{cases}$

12. TOUS Banque CCP 74

(a) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
- Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

(b) On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t ,

dérivables sur \mathbb{R} .

En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

13. TOUS Banque CCP 31

- (a) Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
- (b) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

14. Banque CCP 57

- (a) Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .
- Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
 - Donner la définition de « f différentiable en $(0, 0)$ ».

(b) On considère l'application définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- i. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- ii. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

15. **TOUS Banque CCP 52** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

- (a) Prouver que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
- (b)
 - i. Justifier que le domaine de définition de f est bien \mathbb{R}^2 .
 - ii. Déterminer α pour que f soit continue sur \mathbb{R}^2 .
- (c) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
 - i. Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.
 - ii. Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur.
 - iii. f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Prochain programme : Calcul différentiel

GROUPES DE COLLES

Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles

G 2 : Breton , **G 4** : Arar , Munir , **G 5** Le Bris , **G 6** Ribes , **G 7** Queinnec

G 8 Niangoran, Polydore , **G 9** Verdin , **G 10** Jayad , Laurent, Clautrier ,

G 12 Dathevy , Auger , **G 13** Foulon , **G 14** Plessis, Varennes , **G 15** Briard, Denizot

Groupe A : les autres