Programme de Colle - Semaine n^{o} 22

Du 25 mars 2024 au 29 mars 2024

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les él ‘eves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"B"**.
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **B**.
Remarque : La note pour un membre du groupe B ne pourra pas dépasser 14
Remarque : Les questions "courtes" ayant représenté une trop grande perte de temps pendant les colles précédentes, elles sortent du programme de colle. A partir de cette semaine une seule question de "cours" sera posée aux élèves.

Cours

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

- ✏ Produit scalaire. Norme euclidienne (ou pré-hilbertienne)
- ✏ Propriétés : identité de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski

Orthogonalité

- ✏ Famille orthogonale, famille orthonormale
- ✏ Orthonormalisation de Schmidt
- ✏ Expressions dans une base orthonormale d'un espace euclidien
- ✏ Orthogonalité de parties d'un espace pré-hilbertien
- ✏ Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.
- ✏ Projections et symétries orthogonales.
- ✏ Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie

Endomorphismes d'un espace euclidien

Adjoint d'un endomorphisme

- ✏ Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien
- ✏ Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien
- ✏ Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint
- ✏ Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée.
- ✏ Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*

Isométries vectorielles

- ✏ Isométrie vectorielle d'un espace euclidien
- ✏ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable
- ✏ Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale
- ✏ Réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.

Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

- ✏ Endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) d'un espace euclidien
- ✏ Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs autoadjoints
- ✏ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable
- ✏ Théorème spectral : si u est un endomorphisme autoadjoint, u est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) en base orthonormale.
- ✏ Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Définition et carctérisation à l'aide du spectre.
- ✏ Traduction matricielle

Equations différentielles linéaires

Révision des chapitres vus en MPSI

- ✏ Équation : $y' + a(t)y = b(t)$ avec a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$
- ✏ Équation : $y'' + ay' + by = c(t)$ avec a et b deux constantes de $\mathbb{K}$ et c combinaison linéaire de fonctions du type : $t \mapsto e^{\alpha t}P(t)$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et P polynôme.

Equation différentielle linéaire scalaire du premier ordre

- ✏ Equations résolues en y' : Solutions de l'équation (E_H), solutions de (E), théorème de Cauchy.
- ✏ Equations non résolues en y' : problemes de raccord.

Equation différentielle linéaire du premier ordre

- ✏ Théorême de Cauchy (admis).
- ✏ Solutions de $x' = a(t)(x)$. Système fondamental de solutions
- ✏ Solutions de $x' = a(t)(x) + b(t)$. Méthode de variation des constantes.
- ✏ Cas particulier des équations à coefficients constants

Equations différentielles scalaires d'ordre n

- ✏ Equivalence à un système. Structure de l'ensemble des solutions
- ✏ Equations différentielles du second ordre résolue en y'' : résolution, méthode de Lagrange, méthode de variation des constantes, cas particulier des équations à coefficients constants
- ✏ Exemple de résolution de $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$

Calcul différentiel

Différentiabilité

- ✏ Dérivée selon un vecteur.
- ✏ Dérivées partielles
- ✏ Application différentiable en un point.
- ✏ Unicité/définition de l'application différentielle en un point en cas de différentiabilité.
- ✏ Coordonnées de l'application différentielle en un point, matrice jacobienne, gradient (notation $\nabla f(a)$). Application de classe $\mathscr{C}^1$
- ✏ Opérations sur les applications différentiables. Différentielle d'une composée, règle de la chaine.
- ✏ Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arc
- ✏ Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Théorème de Schwarz

Optimisation

- ✏ Point critique d'une application différentiable.
- ✏ Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur pour les applications différentiables
- ✏ Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles. Notation $H_f(x)$.
- ✏ Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f admet un minimum local en x, alors x est point critique de f et $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Adaptation au cas d'un maximum local.
- ✏ Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si x est point critique de f et si $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en x. Adaptation au cas d'un maximum local

Exercices et questions de cours

1. **TOUS** Gradient et laplacien en coordonnées polaires.
2. **TOUS** Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre : $y' + a(t)y = b(t)$
3. **TOUS Banque 76**
   Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
   On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
   (a) i. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   ii. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
   (b) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}\left([a,b], \mathbb{R}\right),\ \forall\, x \in [a,b]\ \ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.
4. **Banque CCP 63**
   Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\big(\,|\,\big)$. On pose $\forall x \in E, \big\|x\big\| = \sqrt{\big(x|x\big)}$.
   Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.
   (a) Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E, \big(u(x)\big|x\big) = 0$ est-il forcément l'endomorphisme nul ?
   (b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$
   ii. $\forall (x,y) \in E^2, \big(u(x)\big|u(y)\big) = \big(u^*(x)\big|u^*(y)\big)$
   iii. $\forall x \in E, \big\|u(x)\big\| = \big\|u^*(x)\big\|$
5. **Banque CCP 80**
   Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\,(t)\,g\,(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
   (b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos\,(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.
6. **TOUS Banque CCP 66**
   (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   Prouver que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$
   (b) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
   (c) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), AB = BA \Longrightarrow A^2B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
   (d) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$
7. **TOUS** Résoudre $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$. Y-a-til des solutions sur $\mathbb{R}$?
8. **TOUS** Résolution de $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{1+x^2}$
9. **TOUS** Résolution de $\left\{\begin{array}{l} x' = 3x - 2y + e^t \\ y' = x + e^t \end{array}\right.$
10. Résoudre $\left\{\begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{array}\right.$
11. $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 2e^t \\ y' = 4x - 3y + e^t \\ z' = -2x + y - 1 \end{cases}$
12. **TOUS Banque CCP 74**
    (a) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
    i. Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
    ii. Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

(b) On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.

En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

13. **TOUS Banque CCP 31**

    (a) Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.

    (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

14. **Banque CCP 57**

    (a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

    i. Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.

    ii. Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$ ».

    (b) On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    i. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

    ii. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

15. **TOUS Banque CCP 52** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

    On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

    (b) i. Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.

    ii. Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

    (c) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.

    i. Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.

    ii. Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.

    iii. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

GROUPES DE COLLES

Groupe B : classés par ordre croissant des groupes de colles
G 2 : Breton , **G 4** : Arar , Munir , **G 5** Le Bris , **G 6** Ribes , **G 7** Queinnec
G 8 Niangoran, Polydore , **G 9** Verdin , **G 10** Jayad , Laurent, Clautrier ,
G 12 Dathevy , Auger , **G 13** Foulon , **G 14** Plessis, Varennes , **G 15** Briard, Denizot
Groupe A : les autres