Devoir en temps libre n° 00

Instructions générales :
Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
L'emploi d'une calculatrice est interdit
Remarque importante :
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PREMIER PROBLEME :

PARTIE I :

On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2. Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité. On précisera par quelle valeur f est alors prolongée et on continuera à appeler f le prolongement ainsi obtenu. On appellera D' le nouvel ensemble de définition de f .

3. f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$.
Calculer $f'(x)$ sur D puis prouver que f est de classe C^1 sur D'.

4. Etudier les variations de f. On dressera son tableau de variations.
On pourra utiliser la fonction auxiliaire k définie par : $k(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

PARTIE II :

Dans la suite. on s'intéressera à l'intégrale suivante $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.
On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur.
Pour tout entier naturel n non nul on définit les polynômes
$P_n(X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n}$
et $Q_n(X) = X - \dfrac{X^2}{2^2} + \dfrac{X^3}{3^2} - \dfrac{X^4}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n^2}$

5. Préciser pourquoi l'intégrale précédente est bien définie.

6. Justifier : $\forall t \in [0,1], \quad 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$

7. En déduire : $\forall x \in [0,1], \quad P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt.$

Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt.$

8. Etablir la majoration : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

9. Comparer pour tout $x \in \,]0,1]$: $Q_n'(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$

10. En notant g_n l'application définie pour tout $x \in]0,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $g_n(0) = 0$, montrer :

$$|Q_n(1) - L| \leqslant \int_0^1 |g_n(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} Q_n(1)$

11. Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ donne une valeur approchée de L à 10^{-4} près.

PARTIE III :

On s'intéresse à présent aux dérivées successives de f que l'on note $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

12. Montrer que f est indéfiniment dérivable $]0,+\infty[$

13. Calculer $f''(x)$ sur $]0,+\infty[$.

14. Montrer que pour tout entier naturel n non nul il existe un polynôme T_n à coefficients réels et un réel a_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$$

15. Montrer que tous les coefficients de T_n sont des entiers.

16. En utilisant la formule de Leibniz calculer $f^{(n)}(x)$ et en déduire la valeur de T_n.
On ne cherchera pas à expliciter une expression de chacun des coefficients de x^k $(k \in \mathbb{N})$ de ce polynôme
Vérifier cette expression pour $n = 2$

SECOND PROBLEME :

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire qui vérifient 1a relation : $M \cdot {}^tM = {}^tM \cdot M \quad (1)$
Dans la suite de l'énoncé. on se : contentera alors de dire dans ce cas que la matrice M vérifie la relation (1).

PARTIE I :

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire ayant 2 lignes et 2 colonnes et des coefficients réels.
On notera en particulier :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1)

2. Calculer A^2. En déduire que pour tout, entier naturel non nul n, A^n vérifie la relation (1).

3. Montrer que A est inversible.

Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est A.

4. Préciser les valeurs de $u\left(\vec{i}\right)$ et $u\left(\vec{j}\right)$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Montrer que u est une symétrie. Préciser l'ensemble des vecteurs invariants.

Dans toute la suite on notera $U = A + I$.

5. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer que, pour tout entier n, il existe un réel α_n tel que $U^n = \alpha_n U$.
En déduire que toutes ses puissances U^n, $n \in \mathbb{N}^*$ vérifient (1)

On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

6. Calculer les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée.
En déduire que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

7. Etant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d pour que M appartienne à E_2. On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2

8. En déduire que E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on précisera pour chacun une base.

9. Etant données M et N deux matrices de E_2 a-t-on nécessairement $M \cdot N \in E_2$? On pourra utiliser certaines matrices introduites précédemment dans l'énoncé.

PARTIE II :

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $\mathcal{B}' = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\vec{i}) = -\vec{k}$, $h\left(\vec{j}\right) = \vec{i}$, $h\left(\vec{k}\right) = \vec{j}$ ainsi que $S = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(h)$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$
L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1) est noté E_3.

10. Représenter la matrice S

11. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3.

12. Montrer que pour tous réels a, b et c la matrice $R = aI_3 + bS + cS^2$ appartient à E_3

13. En déduire que E_3 contient un espace vectoriel de dimension 3 que l'on notera F.

14. Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

PARTIE III :

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $\mathcal{B}'' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$

On définit la matrice B par : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

où a est un réel quelconque, et on appelle u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}''}(u) = B$

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_4

15. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$.

Dans toute la suite on pose $a = -1$.

16. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.

17. Calculer $u(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4})$. Que remarque-t-on ?

18. Calculer $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Commenter le résultat obtenu

19. On note $\mathcal{C} = (\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\ ,\ \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}\ ,\ \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_4}\ ,\ \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4})$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Déduire de la question précédente $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u)$

En déduire l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $B = P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale. Explicitez cette matrice P^{-1} en faisant apparaitre la démarche sur la copie .

20. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B^n = P\Delta^n P^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} pour tout entier naturel p en fonction de B et de B^2.

Devoir Facultatif

CONCOURS COMMUN 2009
DES ÉCOLES DE MINES D'ALBI, ALÈS DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Lundi 18 mai 2009 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :
Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve commune de Mathématiques.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Remarque importante :
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème III : Algèbre et Géométrie

I. Étude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \end{array}$$

et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.

2. Montrer que φ est linéaire.

3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.

4. L'application f est-elle injective ? surjective ?

5. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\varphi$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$?

6. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

II. Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (1, -2X+1, 6X^2-6X+1).$$

7. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. Écrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

9. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.

10. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.

11. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neufs coefficients de A^n.

12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c.

13. En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

III. Une autre preuve du résultat précédent

14. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right).$$

15. En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Problème IV : Analyse

Dans tout ce problème, on notera sh la fonction sinus hyperbolique, ch la fonction cosinus hyperbolique et th la fonction tangente hyperbolique.

I. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Étudier la parité de f.

2. **2.a)** Rappeler un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2.b) Déterminer la limite de f en 0.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left[\operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] \times \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{th}(X) < X$.

5. En déduire le tableau de variations de f.

6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \longmapsto \dfrac{\operatorname{sh}(X)}{X}$.

7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, f admet un développement de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

où $a_0, \ldots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera.

8. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée F, puis prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

II. Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) suivante, que l'on va résoudre sur différents intervalles

$$xy' + y = \operatorname{ch}(x). \qquad (E)$$

9. Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E).

10. Donner sans justification les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.

11. Justifier que la fonction F (définie dans la question .8.) est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

III. Étude d'une suite

12. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f(x) = \frac{n+1}{n}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note u_n.

On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les questions qui suivent.

13. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

14. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

15. En utilisant la question .7., déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

IV. Une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

16. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)$.

17. Justifier que J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J'(x) = f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

18. En déduire le signe de J' sur $\mathbb{R}_+^*$; on exprimera le (ou les) zéro(s) de J' à l'aide de la fonction ln.

19. *On admet les résultats suivants :*

(*) $\lim\limits_{x \to 0^+} J(x) = +\infty$,

(*) $\lim_{x \to +\infty} J(x) = +\infty$ *et* J *admet au voisinage de* $+\infty$ *une asymptote d'équation* $y = \dfrac{x}{2}$,

(*) la courbe représentative de J *est toujours "au dessus" de l'asymptote précédente.*

Donner le tableau de variations de J sur $\mathbb{R}_+^*$.

20. Tracer l'allure de la courbe représentative de J.

On donne pour le tracé : $\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})} \approx 0,76$ *et* $J\left(\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\right) \approx 0,65$ *à* 10^{-2} *près.*

Fin du sujet