1 Complexes

Notions de conjugué, module, argument, affixe, écriture algèbrique, écriture trigonométrique (ou exponentielle), formules de Moivre et d'Euler, équations du second degré, formules trigonométriques, forme canonique.

Exercice 1. 1.1.1.1.18 Résoudre les équations suivantes :

1. $\begin{cases} z_1 \ z_2 = 7 \\ z_1 + \ z_2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} z_1 \ z_2 = 5 \\ z_1 + \ z_2 = 2 \end{cases}$

Exercice 2. Module et argument de :

$$(1+i)^{19} \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{13} \quad ; \quad \left(\frac{1-i}{-\sqrt{3}+i}\right) \quad ; \quad \frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad ; \quad \left(-2\sqrt{3}+2i\right)^5.$$

Exercice 3. En passant par une forme canonique, résoudre : $z^2 - (4-2i)\,z + 3 - 6i = 0$

Exercice 4. 1.1.1.1.19 Résoudre : $\left(\dfrac{z-2}{z-4i}\right)^2 - 6\left(\dfrac{z-2}{z-4i}\right) + 13 = 0$

Exercice 5. 1.1.1.1.8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+2i)^n + (z-2i)^n = 0$

Exercice 6. 1.1.1.1.13 Résoudre les équations suivantes :

1. $z^4 + (3-6i)z^2 + 2(16-63i) = 0$.
2. $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$.
3. $z^4 - 4(i+1)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5 = 0$ sachant qu'il y a des solutions dans $\mathbb{R}\bigcup i\mathbb{R}$.

Exercice 7. 1.1.1.1.14

1. Résoudre : $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$.
2. En déduire les tangentes des nombres $\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{2\pi}{5}$ puis celle de $\dfrac{\pi}{10}$.

Exercice 8. 1.1.1.1.15 Linéariser : $\cos^6 x \quad ; \quad \sin^5 x \quad ; \quad \sin^7 x \quad ; \quad \cos^3 x \sin^3 x \quad ; \quad \cos^3 x \sin^4 x$

Exercice 9. 1.1.1.1.16 Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$. En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$

Indications 9. Résoudre l'équation $\cos(5x) = 0$

Exercice 10. Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 2\cos(2x)$
2. $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 1$

2 Sommations, récurrence

Triangle de Pascal, coefficients binomiaux, formule du binôme, principe de récurrence, suite arithmétique, suite géométrique

Exercice 11. En développant : $(1+1)^n, (1-1)^n$, calculer en fonction de n :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ , \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \text{ et } \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$$

Exercice 12. Montrer que : $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

En déduire, sans utiliser la formule du binome, l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Exercice 13. Soit $u_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$. Montrer que $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 14. Par combien de zéros se termine le nombre 2020!

Exercice 15. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \ = 1 + 2 + ... + n$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (n + 1 - k \ )$.
Montrer que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$: **a)** par récurrence **b)** en calculant $S_n + T_n$

Exercice 16. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ avec $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
Montrer que $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$: **a)** par récurrence **b)** en calculant $q\ S_n - S_n$

Exercice 17. 1.1.2.1.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{\sqrt{17}}\left(\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right)$.
Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$

Exercice 18. 1.1.2.1.7 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(n+1-k)$
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (j-i)\,j$
3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i\ j$
4. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} (i+j)$
5. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} i\ j$
6. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j}$
7. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$
8. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2^j$

Exercice 19. 1.1.2.1.8 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$

Exercice 20. 1.1.4.1.2 En utilisant la formule de Newton sur $(1+x)^n$ avec des valeurs de x bien choisies ou en transformant (par exemple en dérivant), simplifier les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,(k-1) \binom{n}{k}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 21. 1.1.4.1.5 Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme double : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$

3 Dérivation, intégration

Formules de dérivation des produits, quotients et composées, intégration par parties, primitives et dérivées des fonctions usuelles, changement de variables.

Exercice 22. Déterminer la dérivée $n-$ ième de la fonction : $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \to \dfrac{1}{1+x}$

Exercice 23. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$. Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n. En déduire I_5

Exercice 24. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos(x) dx$. Déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n. En déduire I_5

Exercice 25. Montrer que : $\forall x \in [0,1], 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 \leqslant e^x \leqslant 1 + x + x^2$

Exercice 26. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x - \dfrac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$

Exercice 27. 1.2.7.1.3 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\sqrt{1+t}}}$ (poser $u=\sqrt{1+\sqrt{1+t}}$)
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} (\arcsin t)^2 \,\mathrm{d}t$ (poser $u=\arcsin(t)$)
3. $\displaystyle\int_{0}^{\ln(2)} \sqrt{e^t-1}\mathrm{d}t$ (poser $u=e^t$)
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(1+t^2\right)\arctan t\mathrm{d}t$ (IPP)
5. $\displaystyle\int_{1}^{2} (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t$ (poser $u=\ln(t)$)

Exercice 28. 1.2.7.1.4 Calculer les primitives de :

1. $\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)^3}$ (poser $u=x^2$ puis transformer la fraction en $A/u+B/(u+1)+C/(u+1)^2+D/(u+1)^3$)
2. $\dfrac{x^3}{x^2+2x+2}$ (transformer la fraction en $Ax+B+(Cx+D)/(x^2+2x+2)$)
3. $\dfrac{1}{(x+1)^5-x^5-1}$ (transformer la fraction en $A/x+B/(x+1)+(Cx+D)/(x^2+x+1)$)

Exercice 29. 1.2.7.1.5 Trouver les primitives de :

1. $\sin^4 x$
2. $\sin^{10} x \times \cos^3 x$
3. $\sin^4 3x \cos^2 3x$
4. $\sin 9x \sin x$

Exercice 30. 1.2.7.1.6 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\arctan x\mathrm{d}x$ (poser $u=\dfrac{1}{x}$)
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\arctan x\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\mathrm{d}x$ (IPP)
5. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{5\,\mathrm{sh}\, x-4\,\mathrm{ch}\, x}$

Exercice 31. 1.2.3.1.10 Montrer que : $e^x=3+x$ admet une seule solution positive a. Trouver sa partie entière. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\ln(u_n+3)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. Montrer qu'il existe $k>0$ tel que : $\forall n\geqslant 0$, $|u_{n+1}-a|\leqslant k\,|u_n-a|$. En déduire : $\forall n\geqslant 0$, $|u_n-a|\leqslant \dfrac{1}{4^n}$. Trouver n pour que u_n soit une valeur approchée à 10^{-4} près de a.

Exercice 32. 1.2.3.1.11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Montrer qu'il existe un polynome P_n de degré n tel que : $f^{(n)}(t)=\dfrac{P_n(t)}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}}$.

Montrer que, pour $n\geqslant 1$, on a : $\forall t\in\mathbb{R}$,

- ☞ $P_{n+1}(t)+(2n+1)\,t\,P_n(t)+n^2\left(1+t^2\right)\,P_{n-1}(t)=0$
- ☞ $P_{n+1}(t)=\left(1+t^2\right)\,P_n'(t)-(2n+1)\,t\,P_n(t)$
- ☞ $\left(1+t^2\right)\,P_n''(t)-(2n-1)\,t\,P_n'(t)+n^2\,P_n(t)=0$

4 Étude de fonctions

Exercice 33. 1.2.6.1.1 Etudier la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{x-3}$

Exercice 34. 1.2.6.1.2 Etudier la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$

Exercice 35. 1.2.6.1.3 Etudier la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$

Exercice 36. 1.2.6.1.4 Etudier la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

Exercice 37. 1.2.6.1.5 Etudier la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$

Exercice 38. 1.2.6.1.6 Etudier la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$

Exercice 39. 1.2.6.1.7 Etudier la fonction définie par : $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$

Exercice 40. 1.2.6.1.8 Etudier la fonction définie par : $f(x) = x + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 41. 1.2.6.1.9 Etudier la fonction définie par : $f(x) = \cos(2x) + \cos(x)$

Exercice 42. 1.2.6.1.10 Etudier la fonction définie par : $f(x) = \ln(1 + 2x) - x$

Exercice 43. 1.2.6.1.11 Etudier la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{5x}{1 + e^x}$

Exercice 44. 1.2.6.1.12 Etudier la fonction définie par : $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$

Exercice 45. 1.2.6.1.13 Etudier la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 46. 1.2.6.1.14 Etudier la fonction définie par : $f(x) = \operatorname{th}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Exercice 47. 1.2.6.1.15 Etudier la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\ln|2x+1|}{\ln|3x+1|}$

Exercice 48. 1.2.6.1.16 Etudier la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{3}{5}\sqrt{|4 - x^2|}$

Exercice 49. 1.2.5.1.4 Montrer que $\arctan(1+x) - \arctan x = \arctan \dfrac{1}{1+x+x^2}$.
En déduire une expression simple de $S_n = \arctan \dfrac{1}{3} + \arctan \dfrac{1}{7} + ... + \arctan \dfrac{1}{1+n+n^2}$ ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 50. 1.2.5.1.5 Montrer que $\arctan(e^x) - \arctan\left(\operatorname{th} \dfrac{x}{2}\right)$ est constant.

Exercice 51. 1.2.5.1.6 Trouver les monotonies de $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ et $g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

Exercice 52. 1.2.5.1.7 Simplifier les expressions suivantes puis tracer les graphes des fonctions associées :

1. $f(x) = \sin(3 \arcsin x)$
2. $f(x) = \arcsin(\sin 3x)$
3. $f(x) = \sin(2 \arctan x)$
4. $f(x) = \arcsin(\cos x) + \arccos(\sin x)$
5. $f(x) = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$
6. $f(x) = \arccos \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$
7. $f(x) = \arctan(\tan x)$
8. $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
9. $f(x) = \arccos\left(\cos \dfrac{x}{3}\right)$
10. $f(x) = \sin(2 \arcsin x)$
11. $f(x) = \arcsin(\sin 2x)$

5 Analyse asymptotique

Exercice 53. 1.2.4.1.8 Donner un DL aux points et ordres voulus :

1. $\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$ en 0 ordre 5
2. $(\operatorname{ch} x)^{(1+\sin x)}$ en 0 ordre 3
3. $e^{\cos x}$ en 0 ordre 7
4. $\sin x\ \operatorname{sh}^2 x$ en 0 ordre 5
5. $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ en 0 ordre 4
6. $\dfrac{\ln x}{x^2}$ en 1 ordre 4
7. $\arctan\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ en $+\infty$ ordre 3
8. $e^x-\sqrt{1+2x}$ en 0 ordre 5

Exercice 54. 1.2.4.1.9 En utilisant des DL, donner les positions relatives au voisinage de 0 des courbes de :
$f_1(x)=e^{\sin x}$, $f_2(x)=e^{\frac{x}{\cos x}}$, $f_3(x)=3-2\left(1+x^3\right)\sqrt{1-x}$ et $f_4(x)=\dfrac{x}{\sin x}+x$

Exercice 55. 1.2.4.1.10
Calculer un équivalent simple des expressions suivantes :

1. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$
2. $\sqrt{x^2+2x+3}-(ax+b)$ en $+\infty$
3. $\dfrac{1}{\cos x}-\tan x$ en $\dfrac{\pi}{2}$
4. $\dfrac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ en $\dfrac{\pi}{2}$
5. $\dfrac{x^3+1-\cos x}{(x^2-2x)\tan(3x)}$ en 0
6. $\dfrac{\tan x-\sin x}{e^x-\cos x}$ en 0
7. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ en $+\infty$
8. $\sqrt[4]{x^4+1}-x$ en $+\infty$
9. $\dfrac{\sin x-x\cos x}{e^{\cos x}-e}$ en 0
10. $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
11. $\dfrac{\ln(\cos 3x)}{\sin^2(2x)}$ en 0
12. $\dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$ en 0

Exercice 56. 1.2.4.1.11
Montrer que la fonction $x\to(1+x)^{\frac{1}{x}}$ se prolonge par continuité en 0 et écrire son $\mathrm{DL}_3(0)$.

Exercice 57. 1.2.4.1.12

1. $\mathrm{DL}_5(0)$: $\sin^2 x$
2. DL_5 en $\dfrac{\pi}{6}$ de $\sin x$
3. DL_3 en 0 de $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$
4. DL_1 en 1 de $(1+\ln x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$
5. DL_n en 0 de $\cos^3 x$
6. DLG_3 en 0 de $\dfrac{\ln(1+\cos x)}{\tan x}$
7. DL_2 $\left(\text{en } \dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$ de $\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$

Exercice 58. 1.2.4.1.13
Etudier les branches infinies de $x\to\dfrac{x^2}{x+4}\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2x+6}}$

Exercice 59. 1.2.4.1.14
1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\exists! x_n\in\left]n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[\ \Big|\ |x_n\sin x_n|=1$
2. Développement asymptotique de x_n à la précision $\dfrac{1}{n^2}$

Exercice 60. 1.2.4.1.15
1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, n\geqslant 2,\exists! x_n\in]n+1,n+2[\ \Big|\ (x_n-n)\ln(n)=x_n\ln(x_n-n)$
2. Montrer que $x_n-n-1\sim\dfrac{\ln(n)}{n}$

Exercice 61. 1.2.4.1.20
1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\exists! x_n\in\left]n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[\ \Big|\ \tan(x_n)=x_n$
2. Développement asymptotique de x_n à la précision $\dfrac{1}{n^2}$ quand n tend vers $+\infty$

Exercice 62. Comportement en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction définie par $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Exercice 63. Comportement en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction définie par $f(x)=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}\sqrt{|4-x^2|}$

Exercice 64. Comportement en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction définie par $f(x)=x^2\arctan\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

6 Raisonnements, ensembles

Exercice 65. 1.1.2.1.1
En raisonnant par contraposition, montrer que si n_1, n_2, …, n_9 sont 9 entiers naturels tels que $n_1+n_2+\cdots+n_9=90$. Montrer qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure ou égale à 30

Exercice 66. 1.1.2.1.3 En raisonnant par analyse-synthêse, déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x)f(y)=f(x\ y)+x+y$. (On pourra montrer que si f est solution, $f(0)=1$)

Exercice 67. En raisonnant par analyse-synthêse, montrer que toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ s'écrivent comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 68. 1.1.7.1.4 Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ croissante, $f(\{0,1\})\bigcap\{0,1\}=\emptyset$. Soit $A=\{x\in[0,1]\mid f(x)\geqslant x\}$

1. Montrer que A admet une borne supérieure α.
2. Montrer que α est un point fixe de f.
3. En déduire que si f et croissante de $[0,1]$ vers $[0,1]$, f admet un point fixe

Exercice 69. 1.1.7.1.5
Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$. En déduire : $\left\lfloor\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{10000}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right\rfloor$

Exercice 70. 1.1.7.1.6 Montrer que : **a)** $x\leqslant y\Rightarrow\lfloor x\rfloor\leqslant\lfloor y\rfloor$ **b)** $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \lfloor -x\rfloor=-\lfloor x\rfloor-1$
c) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \lfloor x+y\rfloor-\lfloor x\rfloor-\lfloor y\rfloor\in\{0,1\}$ **d)** $\forall(x,a)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \lfloor x+a\rfloor=\lfloor x\rfloor+a$

Exercice 71. 1.1.7.1.7 Montrer que : $\forall n\in\mathbb{Z}, \left\lfloor\dfrac{n}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{n+2}{6}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{n+4}{6}\right\rfloor=\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{n+3}{6}\right\rfloor$

Exercice 72. 1.1.7.1.8

1. Soit $(x,y)\in\mathbb{Q}^2$ tel que $\left(\sqrt{x},\sqrt{y}\right)\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^2$. Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont irrationnels

Exercice 73. 1.1.7.1.9 Montrer : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor x+y\rfloor\leqslant\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor$

Exercice 74. 1.1.7.1.10 Montrer : $\forall(m,n)\in\mathbb{Z}^2,\ \left\lfloor\dfrac{n+m}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{n-m+1}{2}\right\rfloor=n$

Exercice 75. 1.1.6.1.2
Soit E un ensemble. Si $A\in\mathcal{P}(E)$, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique de A. Montrer :

1. $A\subset B\Longleftrightarrow\mathbb{1}_A\leqslant\mathbb{1}_B$
2. $\mathbb{1}_{A\cup B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$
3. $\mathbb{1}_{E\setminus A}=1-\mathbb{1}_A$
4. $\mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$
5. $\mathbb{1}_{A\setminus B}=\mathbb{1}_A(1-\mathbb{1}_B)$
6. $\mathbb{1}_{A\Delta B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\,\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B=(\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2$ avec $A\Delta B=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$

Exercice 76. 1.1.6.1.3 Sur $E=\mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a la relation d'ordre : "inclusion". Est-ce une relation d'ordre totale ? Déterminer des parties de E dont $\{1\}$ soit un minorant, $\{1\}$ soit le plus petit élément, $\{1,2,e\}$ soit une borne supérieure sans être le plus grand élément.

Exercice 77. 1.1.6.1.4 Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F. On définit sur E la relation $\mathscr{R}$ par : $\forall(x,y)\in E^2, x\,\mathscr{R}\,y\iff f(x)=f(y)$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E
2. Déterminer les classes d'équivalence lorsque $f=\sin$, $f=\exp$ et $f:x\mapsto x^2$
3. Montrer que : f est injective $\iff$ les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ sont des singletons.

Exercice 78. 1.1.6.1.5 Soient E un ensemble, $n\in\mathbb{N}^*$ et $A_0,A_1,\ldots,A_n$ des parties de E telles que :
$\varnothing=A_0\subsetneq A_1\subsetneq\cdots\subsetneq A_n=E$. Pour tout entier $k\in[\![1,n-1]\!]$, $B_k=A_k\setminus A_{k-1}$.
Montrer que $(B_1,\ldots,B_n)$ est une partition de E

Exercice 79. 1.1.6.1.6 Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F.

1. Montrer que : $\forall(A,B)\in(\mathcal{P}(F))^2, f^{-1}(A\Delta B)=f^{-1}(A)\,\Delta f^{-1}(B)$
2. Montrer que : f injective $\iff\forall(C,D)\in(\mathcal{P}(E))^2, f(C\Delta D)=f(C)\,\Delta f(D)$

EXERCICES DE BANQUE CCINP

Complexes

EXERCICE 84 algèbre

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + \mathrm{i})^n = (z - \mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

EXERCICE 89 algèbre

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Dérivation et intégration

EXERCICE 3 analyse

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

EXERCICE 4 analyse

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

VIEIL EXERCICE 56 analyse

On considère la fonction H définie sur $]1; +\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1; +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.