Devoir en temps libre n° 01

Ce devoir est constitué d'un seul problème. Il est suivi d'un exercice facultatif.

Le problème est constitué de plusieurs parties se proposant parfois d'établir un résultat déja obtenu précédemment par une autre méthode, il est demandé, au cas où vous ne pourriez pas faire tout le devoir, de privilègier d'aller au bout de chaque partie traitée plutot que de laisser inachevées certaines parties abordées Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaitre clairement sur la première page le nombre de copies.

PROBLEME

On rappelle que la série $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

On posera pour tout entier n non nul, $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$, $R_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$ et $S = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

Dans les parties I, II et III, on construit à partir de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des suites qui convergent de plus en plus rapidement vers S.

Les parties IV, V et VI proposent des méthodes indépendantes pour calculer la valeur exacte de S.

Partie I

Vitesse de convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et définition d'une nouvelle suite convergeant vers S.

1. Estimation de $R_n = S - S_n$

1.a) Prouver que pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

1.b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $p > 0$:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

1.c) Montrer que pour tout entier $n > 0$:

$$\frac{1}{n+1} \leqslant S - S_n \leqslant \frac{1}{n}$$

1.d) A partir de quel rang n_0 est-on certain, d'après 1.c), que $|S - S_n| \leqslant 10^{-6}$?

2. Définition d'une suite convergeant vers S, plus vite que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2.a) Déduire de l'inégalité vue au 1.c) que, pout tout $n > 0$:

$$\left| S - S_n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2n(n+1)} \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

2.b) On pose $S'_n = S_n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n}\right)$.

A partir de quel rang n_1, est-on certain, d'après 2.a), que $\left|S - S'_n\right| \leqslant 10^{-6}$? Comparer n_0 et n_1.

Partie II

Accélération de la convergence de S_n vers S (méthode de Stirling)

Pour $x > 0$, on pose $f_0(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_1(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ et $f_2(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

1. Sommation de séries télescopiques

1.a) Décomposer en éléments simples la fraction f_1. Etablir la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_1(n)$ et prouver que, pour tout entier naturel n, on a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_1(k) = \frac{1}{n+1}$.

1.b) De même, montrer que, pour tout entier n, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_2(k)$ existe et vaut $\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

2. Accélération de convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2.a) Établir la relation suivante pour tout $k > 0$:

$$\frac{1}{k^2} - f_1(k) - f_2(k) = \frac{2}{k} f_2(k)$$

2.b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{1}{(n+1)^3}$$

2.c) On pose, pour $n > 0$, $S''_n = S_n + \dfrac{1}{(n+1)} + \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$. Quel terme de la suite $\left(S''_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suffit-il de calculer, d'après 2.b), pour obtenir une valeur approchée de S avec la précision 10^{-6} ? (on ne demande pas le calcul d'une telle valeur approchée). Comparer avec les résultats de la partie I.

Partie III

Accélération de la convergence de S_n vers S (méthode de Bernoulli)

1. Étude préliminaire

Pour $x \in [0, 1]$, on pose $g(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{12}x$.

1.a) Étudier les variations sur $[0, 1]$ de la fonction g. Mettre en évidence un maximum, atteint en α, un minimum, atteint en β. En utilisant l'équation dont α est racine, montrer que : $g(\alpha) = \dfrac{1-2\alpha}{72}$

1.b) Calculer $g(\alpha) + g(\beta)$ et en déduire que, sur $[0, 1]$, la fonction $|g|$ atteint son maximum M en α ou en β. Calculer la valeur exacte de M et montrer que $M \leqslant \dfrac{1}{108}$.

2. Accélération de la convergence

2.a) En intégrant plusieurs fois par parties, établir pour $k \geqslant 1$, la relation suivante :

$$4! \int_0^1 \frac{g(x)}{(x+k)^5} dx = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3}\right)$$

2.b) En sommant les égalités précédentes d'un entier $n > 0$ à $n + p$, puis en faisant tendre p vers l'infini, montrer l'inégalité suivante pour $n \geqslant 1$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3}\right| \leqslant \frac{6M}{n^4}$$

2.c) Définir alors une suite $\left(S'''_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $\forall n \geqslant 1, \left|S - S'''_n\right| \leqslant \dfrac{1}{18n^4}$, puis déterminer quel terme de S'''_n il suffit de calculer pour obtenir une valeur approchée de S à 10^{-6} près. Comparer avec le résultat de la partie II.

Partie IV

Valeur exacte de S (grâce aux intégrales de Wallis)

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\, dt \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad K_n = \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}\, J_n$$

1. Les intégrales de Wallis

1.a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$.

1.b) Calculer I_0, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$.

2. Relation entre S_n et K_n

Soit n un entier naturel non nul

2.a) Démontrer la relation $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$

2.b) Montrer que $K_{n-1} - K_n = \dfrac{\pi}{4n^2}$, et en déduire que : $\dfrac{\pi}{4} S_n = J_0 - K_n$

3. Valeur exacte de S

3.a) Établir l'inégalité suivante pour tout réel $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \sin t$

3.b) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)} \qquad \text{puis} \qquad 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

3.c) Calculer J_0, puis montrer que $S = \dfrac{\pi^2}{6}$

Partie V

Valeur exacte de S (grâce aux racines d'un polynôme)

Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel non nul.
On rappelle que si $P = a_0 + a_1 X^1 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_n X^n$ est un polynôme de degré n, la somme des racines complexes de P, répétées avec leur multiplicité, vaut $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

1. Calculs de sommes trigonométriques.

1.a) Soit $t \in]0, \pi[$. Montrer que :

$$\sin\left((2n+1)\,t\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \cos^{2n-2k}(t)\, \sin^{2k+1}(t)$$

puis que :

$$\sin\left((2n+1)\,t\right) = \sin^{2n+1}(t) \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \left(\operatorname{cotan}^2(t)\right)^{n-k}$$

1.b) Montrer que les réels $x_j = \operatorname{cotan}^2\left(\dfrac{j\pi}{2n+1}\right)$ pour $j \in [\![1, n]\!]$, sont deux à deux distincts et que ce sont les racines du polynôme : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{n-k}$

1.c) En déduire que :

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{j\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

2. Encadrement et limite de S_n

2.a) Montrer que : $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin(t) \leqslant t \leqslant \tan(t)$ puis que $\operatorname{cotan}^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2(t)$

2.b) En déduire l'encadrement :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} S_n \leqslant \frac{2n(n+1)}{3}$$

Retrouver ainsi la valeur de S.

Partie VI

Valeur exacte de S (grâce au noyau de Dirichlet)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note D_n le noyau de Dirichlet, défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

1. Utilisation d'une suite L_n

1.a) Montrer que pour $n \leqslant 1$ et $x \in]0, 2\pi[$, $D_n(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$

1.b) Pour $n \geqslant 1$, on pose : $L_n = \int_0^{\pi} x D_n(x) dx$. Montrer que $L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}$

1.c) En déduire que : $L_{2n+1} = \frac{\pi^2}{4} - 2S_{2n+1} + \frac{1}{2} S_n$

2. Valeur exacte de S

2.a) Montrer que la fonction φ, définie sur $]0, \pi[$ par $\varphi(x) = \frac{x}{2\left(\sin \frac{x}{2}\right)}$ est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction prolongée est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0, \pi]$

2.b) Prouver, à l'aide d'une intégration parties, que si ϕ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0, \pi]$, on a : $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\pi} \phi(x) \sin(\lambda x)\, dx = 0$

2.c) Montrer que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0, puis retrouver la valeur exacte de S

Exercice Facultatif

Soit G un sous groupe du groupe $(\mathbb{R}, +)$, avec $G \neq \{0\}$.

1. Montrer que $G \bigcap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure que l'on notera α. Montrer que : $\alpha \geqslant 0$.

2. On suppose que l'on a $\alpha > 0$. Montrer qu'alors $G = \alpha\mathbb{Z}$. (Rappel : $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha k,\ k \in \mathbb{Z}\}$).

3. On suppose que l'on a $\alpha = 0$. Montrer qu'alors G est dense dans $\mathbb{R}$ i.e. entre deux réels x et y distincts quelconques, il existe au moins un élément de G. (Indication : Considérer $\varepsilon \in G$ tel que $0 < \varepsilon < \frac{|x-y|}{2}$ et montrer qu'il existe un multiple de ε entre x et y)

4. Exemple : soit $\omega \in \mathbb{R}$ et $G = \left\{a + b\omega,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

4.a) Montrer que G est un sous groupe additif de $\mathbb{R}$.

4.b) Montrer que si ω est un rationnel avec $\omega = \frac{p}{q}$ où $pgcd(p, q) = 1$, alors $G = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

4.c) Que dire si ω n'est pas rationnel ?