Devoir en temps libre n° 02

Sujet Niveau CCP/E3A

Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaitre clairement sur la première page le nombre de copies.

PROBLEME : Règle de Cauchy et règle de Raabe-Duhamel

L'objectif de ce problème est d'établir de nouvelles règles permettant de décider de la convergence de séries à termes réels positifs, de comparer leurs performances et de prendre conscience de leurs limites.

Partie I

La règle de Cauchy

Dans cette partie, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictements positifs, et on suppose que la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite L, réelle ou infinie.

1. Le cas de convergence : $L < 1$.
On suppose dans cette question que $L \in [0, 1[$.

1.a) On fixe un réel q dans l'intervalle $]L, 1[$. Montrer l'existence d'un rang n_0 au delà duquel on a : $0 < u_n < q^n$.

1.b) En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.

2. Le cas de divergence : $L > 1$.
On suppose dans cette question que $L \in]1, +\infty[$ ou $L = +\infty$.

2.a) On suppose $L \in]1, +\infty[$. Montrer l'existence d'un rang n_0 au delà duquel on a : $u_n \geqslant 1$. Quelle est alors la nature de la série $\sum u_n$.

2.b) Montrer que l'on aboutit à la même conclusion lorsque l'on suppose $L = +\infty$

3. Le cas litigieux : $L = 1$.
α étant un paramètre réel, on pose, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

3.a) Déterminer la limite de la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3.b) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? Que peut-on dire de la règle de Cauchy dans ce cas ?

4. Exemple
Pour tout entier n, on pose $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

4.a) En utilisant la règle de Cauchy, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

4.b) Retrouver la nature de cette série par une autre méthode.

5. Un exemple où la règle de Cauchy est plus performante que la règle de d'Alembert.
Pour tout entier n, on pose $u_n = \dfrac{n^{(-1)^n}}{2^n} = \dfrac{\exp\left((-1)^n \ln(n)\right)}{2^n}$. D'autre part, on pose, pour $n > 0$, $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \sqrt[n]{u_n}$.

5.a) Montrer que la série $\sum u_n$ n'est pas grossièment divergente.

5.b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente. Quelle conclusion la règle de d'Alembert fournit-elle quant à l'étude de $\sum u_n$?

5.c) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite. Quelle conclusion la règle de Cauchy fournit-elle quant à l'étude de $\sum u_n$?

6. Preuve du fait que la règle de d'Alembert n'est jamais plus performante que la règle de Cauchy.
On revient au cas général d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs. On pose, pour $n>0$, $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \sqrt[n]{u_n}$.
On pourra utiliser librement le théorème de Césaro.

6.a) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Montrer que si la suite $(z_n - z_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite L, alors la suite $\left(\dfrac{z_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers L.

6.b) Montrer que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $L>0$, alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers L.

6.c) Montrer que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

6.d) Montrer que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

6.e) En déduire que chaque fois que la règle de d'Alembert permettra de déterminer la nature de la série $\sum u_n$, la règle de Cauchy permettra également d'aboutir à la même conclusion

Partie II

Quelques autres améliorations de la règle de d'Alembert

1. La comparaison logarithmique.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs et on suppose qu'il existe un rang n_0 au delà duquel, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

1.a) Montrer l'existence d'un réel positif A, tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait : $0 \leqslant u_n \leqslant A\, v_n$.

1.b) En déduire que la convergence de la série $\sum v_n$ entraine celle de la série $\sum u_n$. Quel résultat obtient-on en contraposant cette affirmation ?

1.c) Montrer que si la règle de d'Alembert permet de conclure à la convergence de la série $\sum u_n$, alors on peut choisir une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique, pour laquelle la règle de comparaison logarithmique aboutira à la même conclusion.

1.d) Montrer que si la règle de d'Alembert permet de conclure à la divergence de la série $\sum v_n$, alors on peut choisir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique, pour laquelle la règle de comparaison logarithmique aboutira à la même conclusion.

1.e) Un exemple oè la règle de comparaison logarithmique est plus performante que la règle de d'Alembert : pour $n>0$, on pose : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \sqrt{n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.
Effectuer les développements limités à l'ordre 1 selon les puissances de $\dfrac{1}{n}$ de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Quelle est la nature de la série $\sum v_n$? La règle de d'Alembert aurait-elle permis d'aboutir à cette conclusion ?

2. La règle de Raabe-Duhamel.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose l'existence d'un réel μ pour lequel on a le développement limité : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\mu}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

2.a) Montrer que, si $\mu < 0$, alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

2.b) β étant un paramètre réel, on pose pour $n>0$, $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. Déterminer le réel γ tel que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\gamma}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2.c) On suppose que $\mu \in [0,1[$. Montrer que l'on peut choisir β de sorte que $\sum v_n$ diverge et que, au delà d'un certain rang, on ait : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Quelle est alors la nature de la série $\sum u_n$?

2.d) On suppose que $\mu \in]1,+\infty[$. Montrer que $\sum u_n$ converge.