Programme de Colle - Semaine n° 02
Du 23 septembre 2024 au 27 septembre 2024

Ce programme est constitué de points déjà abordés en première année, avec ponctuellement quelques compléments

Séries de réels ou de complexes

Généralités

- ✎ Série, terme général, somme partielle, série convergente, somme et restes partiels.
- ✎ *Exemples* : **séries géométriques complexes et séries "télescopiques"**.
- ✎ Condition nécessaire de convergence : le terme général tend vers 0. Grossière divergence.
- ✎ $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \sum u_n \text{ converge}\right\}$ est un espace vectoriel et l'application qui à un élément de cet ensemble associe sa somme est une application linéaire.
- ✎ Série absolument convergence. La convergence absolue entraine la convergence.

Séries à termes réels positifs

- ✎ Critère de convergence : les sommes partielles sont majorées. Exemple : Séries de Riemann
- ✎ Comparaison par majoration : si $u_n \leqslant v_n$, $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge. Dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.
- ✎ **Comparaison par domination ou prépondérance** :
  si $u_n = O(v_n)$ ou si $u_n = o(v_n)$, $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.
- ✎ **Comparaison par équivalence** : Si $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum v_n$ converge.

Comparaison des restes partiels ou sommes partielles de séries

: u_n et v_n sont positifs. On note $S_n(u)$ la somme partielle et $R_n(u)$ le reste partiel (s'il existe) de la série $\sum u_n$.

- ✎ Si $u_n = O(v_n)$, $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.
  - ✔ En cas de convergence des deux séries : $R_n(u) = O(R_n(v))$
  - ✔ En cas de divergence des deux séries : $S_n(u) = O(S_n(v))$
- ✎ Si $u_n = o(v_n)$, même comparaison en remplaçant O par o.
- ✎ Si $u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum u_n$ converge.
  - ✔ En cas de convergence des deux séries : $R_n(u) \sim R_n(v)$
  - ✔ En cas de divergence des deux séries : $S_n(u) \sim S_n(v)$

Comparaison avec une intégrale

Si f est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

- ✎ La série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n+1}^{n} f(t)dt - f(n)$ converge.
- ✎ $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

Série alternée

- ✎ **Règle de Leibniz** (ou "critère spécial des séries alternées") : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et converge vers 0, $\sum (-1)^n v_n$ converge. Signe et domination du reste.
- ✎ Exemples d'utilisation de développements limités lorsqu'un équivalent alterné ne permet pas de conclure

Familles sommables

- ✏ Familles sommables de réels positifs : défnition, opérations
- ✏ Sommation par paquets, théorème de Fubini. Cas des séries doubles.

Structures algébriques usuelles

Groupes

- ✏ Définition, exemples, produit fini de groupes.
- ✏ Sous-groupes, intersection, itérés d'un élément, sous-groupe engendré par une partie, partie génératrice.
- ✏ Groupes monogènes, groupes cycliques.
- ✏ Morphisme de groupes, isomorphisme de groupes, bijection réciproque d'un isomorphisme de groupes, **image directe et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe**, noyau, image, **caractérisation de l'injectivité**.

Exercices et Questions de cours

1. Un des points en gras ci-dessus
2. Une suite d'entiers convergente est stationnaire
3. Image directe et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe
4. Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ \dfrac{1}{\operatorname{ch}(2n+1)} = \displaystyle\sum_{q=0}^{\infty} 2(-1)^q e^{-(2n+1)(2q+1)}$

   En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\operatorname{sh}(2n+1)}$
5. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(p+2)^{(q+2)}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.
6. Existence d'un réel γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ (Constante d'Euler)
7. Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$
8. Règle de d'Alembert
9. Règle de Leibniz (CSSA)
10. Théorème de Césaro
11. Séries de Riemann
12. Séries de Bertrand
13. : **BANQUE CCP MP 46**
   On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.
   (a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
   (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?
14. **BANQUE CCP MP 5**
   (a) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
      i. **Cas $\alpha \leqslant 0$**

         En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
      ii. **Cas $\alpha > 0$**

         Étudier la nature de la série.
         Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.
   (b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Prochain programme : Algèbre