Programme de Colle - Semaine n° 03
Du 30 septembre 2024 au 04 octobre 2024

Séries de réels ou de complexes

Tout type d'exercices

Familles sommables

- Familles sommables de réels positifs : défnition, opérations
- Sommation par paquets, théorème de Fubini. Cas des séries doubles.

Structures algébriques usuelles

Groupes

Rappel

Anneaux et corps

- Anneaux, produit fini d'anneaux, sous-anneaux, morphisme d'anneaux, noyau et image d'un morphisme d'anneau. Calculs dans un anneau (formule du binome, identité $a^n - b^n$)
- Groupe des inversibles d'un anneau.
- Anneau intègre, corps, sous-corps

Idéaux et divisibilité

- Idéaux d'un anneau commutatif, le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal. Somme et intersection d'idéaux.
- Idéal engendré par un élément
- Divisibilité dans un anneau intègre. $x \Big| y \iff yA \subset xA$
- Idéaux de $\mathbb{Z}$
- Groupe des inversibles d'un anneau.
- Anneau intègre, corps, sous-corps

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$. Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est un nombre premier.
- Théorème chinois : pour $n \wedge m = 1$, $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Applications aux systêmes de congruence.
- Fonction indicatrice d'Euler φ. Calcul de $\varphi(n)$ pour $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_q^{\alpha_q}$.
- Théorème d'Euler, petit théorème de Fermat.
- Arithmétique dans $\mathbb{Z}$, Lien avec les idéaux.

Anneau $\mathbb{K}[X]$ et arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

- Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.
- Relation de Bezout, lemme de Gauss.
- Polynômes irréductibles.

Algèbre

- Algèbre, sous-algèbre, morphismes d'algèbres.
- Sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendré par un élément : $\mathbb{K}[u]$
- Lemme de décomposition des noyaux.

Exercices et Questions de cours

1. Une suite d'entiers convergente est stationnaire
2. Image directe et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ \dfrac{1}{\mathrm{ch}(2n+1)} = \displaystyle\sum_{q=0}^{\infty} 2(-1)^q e^{-(2n+1)(2q+1)}$

   En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\mathrm{sh}(2n+1)}$
4. Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$: définition, cyclicité, générateurs
5. Théorème de Lagrange (sur le cardinal des sous-groupes)
6. Existence d'un réel γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ (Constante d'Euler)
7. Idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$
8. Idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$
9. $\overline{k}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi $k \wedge n = 1$
10. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier
11. Fonction indicatrice d'Euler : définition, propriété...
12. Théorème chinois
13. Lemme de décomposition des noyaux
14. **BANQUE CCP MP 86**

    Soit p un nombre premier.
    - (a)
      - i. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
      - ii. Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\dbinom{p}{k} k!$ puis que p divise $\dbinom{p}{k}$.
    - (b)
      - i. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$. **Indication** : Procéder par récurrence.
      - ii. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
15. **BANQUE CCP MP 94**
    - (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
    - (b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
      Soit $c \in \mathbb{N}$.
      Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
    - (c) On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 6 \mod(17) \\ x \equiv 4 \mod(15) \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
      - i. Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
      - ii. *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Prochain programme : **Algèbre**