Programme de Colle - Semaine n° 04
Du 07 octobre 2024 au 11 octobre 2024

Structures algébriques usuelles

Groupes, anneaux, corps, Idéaux, divisibilité, algèbre

Rappel. En particulier notion d'idéal, de polynômes d'endomorphisme (ou de matrice) et d'idéal annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice.
Polynome minimal
Lemme de décomposition des noyaux

Algèbre linéaire

Espaces vectoriels

- ✎ Espace vectoriel, sous-espace vectoriel,
- ✎ Intersection, produit, somme de sous-espaces vectoriels.
- ✎ Somme directe de sous-espaces vectoriels, sous-espaces supplémentaires.
- ✎ Sous-espaces affines

Applications linéaires

- ✏ Application linéaire, images directe et réciproque de sous-espaces par une application linéaire. Noyau, Image.
- ✏ Détermination d'une application linéaire par ses restrictions sur chaque composant d'une somme directe
- ✏ Projecteur, symétrie. Caractérisations.

Familles de vecteurs

- ✏ Combinaisons linéaires, sous-espace engendré par une partie
- ✏ Famille génératrice (finie ou non), famille libre (finie ou non). Base.
- ✏ Caractérisation d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base.

Dimension

- ✏ Definition, théorème de la base incomplète
- ✏ Caractérisation des bases.
- ✏ Dimension d'un sous-espace vectoriel, Formule de Grassmann
- ✏ Théorème du rang. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Formes linéaires et hyperplans, Equations linéaires

- ✏ Formes linéaires, dual. Hyperplans. Dimension en dimension finie
- ✏ Equations linéaires : ensemble des solutions

Matrices

- ✏ Matrices, matrices carrées, Base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- ✏ Produit de matrices, matrices inversibles. Matrice d'une application linéaire
- ✏ Formules de changement de bases, Matrices équivalentes, matrices semblables
- ✏ Rang d'une matrice, théorème du rang
- ✏ Matrice par blocs : produit de matrices par blocs
- ✏ Trace d'une matrice, trace d'en endomorphisme en dimension finie

Déterminant

- ✏ Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme, d'une matrice
- ✏ Calcul de déterminants par : méthode du pivot ou développement selon une rangée

Exercices et Questions de cours

1. Existence d'un nombre γ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$
2. Idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$
3. Fonction indicatrice d'Euler
4. Caractérisation des projecteurs par l'idempotence
5. Caractérisation des symétries par l'involutivité
6. Théorème chinois
7. Lemme de décomposition des noyaux
8. Interpolation de Lagrange : existence d'une solution et expression des coordonnées dans la base de Lagrange
9. Déterminant de Vandermonde
10. Application trace. $tr(AB) = tr(BA)$
11. Si H est une matrice carrée de rang 1, $H^2 = tr(H)\,H$
12. BANQUE CCP 60

    Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

    (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
    (b) f est-il surjectif ?
    (c) Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
    (d) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?
13. BANQUE CCP Vieux 62
    Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
    Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}$.

    (a) Démontrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\ f$.
    (b) Démontrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\ g$.
    (c) Démontrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}\ g$.
14. BANQUE CCP 64
    Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.
    (a) Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
    (b) i. Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \ker f = \ker f^2$.
    ii. Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$.
15. BANQUE CCP 90
    $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
    Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

    (a) Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
    (b) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

    i. Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
    ii. Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

    (c) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
    (d) *Application :* On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
    Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Prochain programme : **Reduction**