Chapitre 3

Révisions et compléments d'algébre linéaire

Contents

3.1 Généralités sur les espaces vectoriels

3.1.1 Espaces vectoriels

E est un ensemble non vide, $+$ une loi de composition interne (en abrégé l.c.i.), c'est à dire une application de $E \times E$ vers E.

E est de plus muni d'une loi externe, notée ".", sur le corps $\mathbb{K}$ des scalaires (sous-corps de $\mathbb{C}$), c'est à dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ vers E.

- **DEFINITION**

$(E,+,.)$ est un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** lorsque :

* $(E,+)$ est un groupe abélien (on notera 0_E ou $\overrightarrow{0}$ l'élément neutre appelé vecteur nul).
* $\forall(\alpha,\beta,x,y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E \times E$:
  - ✎ $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$
  - ✎ $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$
  - ✎ $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$
  - ✎ $1.x = x$

- **Exemples** (à connaitre) :
  * $\mathbb{K}^n$
  * $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel mais aussi un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel
  * $\mathbb{K}[X]$
  * Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et si X est un ensemble quelconque, l'ensemble $\mathcal{F}(X,E)$ des applications de X vers E, est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel. Les lois de $\mathcal{F}(X,E)$ étant obtenues à partir de celles de E
  * Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont n $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels, alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel appelé espace produit.

3.1.2 Sous-espaces vectoriels

- **DEFINITION**

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel. On appelle **sous-espace vectoriel** de E toute partie F de E pour laquelle la restriction de $+$ et . à F confèrent à F une structure de $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

- **PROPRIETE Caractérisations d'un sous-espace vectoriel**

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit F une partie de E . Alors :

F est un sous-espace vectoriel de E sssi F est non vide et stable par combinaison linéaire

sssi

F est non vide et $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(x,y) \in F^2, \alpha.x + \beta.y \in F$

sssi

F est non vide et $\forall\alpha \in \mathbb{K}, \forall(x,y) \in F^2, x + \alpha.y \in F$

- **PROPRIETE**

Soit I un ensemble et $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Dem.

3.1.3 Somme directe de sous-espaces vectoriels

On rappelle les définitions et propriétés suivantes :

- **PROPRIETE - DEFINITION**

Soit $F_1, \dots, F_n$ n sous-espaces vectoriels de E.
Alors l'ensemble $\sum_{i=1}^{n} F_i = \left\{x_1 + \cdots + x_n \middle| (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
Ce sous-espace est appelé la somme des sous-espaces $F_1, \dots, F_n$ et est noté $\sum_{i=1}^{n} F_i$

Dem.

- **DEFINITION**

Soient $F_1, \dots, F_n$ n sous-espaces vectoriels de E.
On dit que **la somme** $F = F_1 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$ **est directe** si l'écriture de tout élément de cette somme sous la forme $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec pour tout i, $x_i \in F_i$, est unique. On note alors $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

- **PROPRIETE**

Soient $F_1, \dots, F_n$ n sous-espaces vectoriels de E de somme $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$. On a équivalence entre :

1. **la somme $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe, i.e. $F = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$**
2. **$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, x_1 + \cdots + x_n = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = 0$**
3. **$\forall i \in [\![1, n]\!], F_i \bigcap \left(\sum_{j \neq i} F_j\right) = \{0\}$**

Dem.

Remarque : Attention : la relation $\forall (i,j) \big| i \neq j,\ F_i \bigcap F_j = \{0\}$ ne caractérise pas les sommes directes. Par exemple $\mathbb{R}$, $i\mathbb{R}$ et $(1+i)\mathbb{R}$ vérifie la relation avec les intersections mais ne sont pas en somme directe dans $\mathbb{C}$

3.1.4 Sous-espaces affines

- **DEFINITION**

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On appelle **sous-espace affine** passant par $a \in E$ et dirigé par un sous-espace vectoriel F de E l'ensemble $W = a + F = \left\{a + x \middle| x \in F\right\}$. F est alors appelé la direction du sous-espace affine W

- **DEFINITION**

Soit deux sous-espaces affines $W = a + F$ et $W' = b + G$.
On dit que W **est parallèle à** W' sssi $F \subset G$.

- **PROPRIETE**

Si $W = a + F$ est un sous-espace affine de E. Si $b \in W = a + F$, alors $W = b + F$

- **PROPRIETE**

L'intersection de deux sous espaces affines est soit vide soit un sous-espace affine. Plus précisément si $W = a + F$ et $W' = b + G$, $W \cap W'$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G$. De plus : $W \cap W' \neq \emptyset \Longleftrightarrow b - a \in F + G \Longleftrightarrow \vec{ab} \in F + G$

3.2 Applications linéaires

E et F désignent deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels .

3.2.1 Définitions

- DEFINITION

✎ On appelle **application linéaire** de E dans F toute application $u : E \to F$ vérifiant : $\forall (x,y) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$.
On peut aussi écrire : $\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(x+\lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$.

✎ On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

✎ Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E vers E. On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

✎ Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective

✎ un **automorphisme** est un endomorphime bijectif.
On note $Gl(E)$ l'ensemble des automorphismes de E

✎ une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E vers le corps de base $\mathbb{K}$.

- PROPRIETE

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire

- PROPRIETE

La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme

3.2.2 Noyau et Image

- PROPRIETE

Les images directes et réciproques d'un sous-espace par une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels .

En particulier :

- PROPRIETE

si $u \in L(E,F)$ $\ker(u) = u^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de d E et $\mathrm{Im}(u) = u(E)$ est un sous-espace vectoriel de F.

- PROPRIETE Caractérisation de l'injectivité

: si $u \in L(E,F)$. Alors :
u est injective ssi $\ker(u) = \{0_E\}$

3.2.3 Structures sur les applications linéaires

- PROPRIETE

$L(E,F)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel

- PROPRIETE

$(L(E),+,\circ,.)$ est une $\mathbb{K}$- algèbre

- PROPRIETE - DEFINITION

$(Gl(E),\circ)$ est un groupe appelé groupe linéaire de E

On remarquera que comme dans tout anneau, la formule du binome (sur deux éléments qui commutent) s'applique dans $L(E)$: mais la multiplication est la loi $\circ$

3.2.4 Détermination d'une application linéaire

THEOREME ***Détermination d'une application linéaire***

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soient $E_1, \ldots, E_n$ n sous-espaces vectoriels de E tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$
Soient $u_1 \in L(E_1, F)$, ..., $u_n \in L(E_n, F)$.
Alors il existe une unique application linéaire $u \in L(E, F)$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, u_i soit la restriction de u à E_i.

Dem.

3.2.5 Projecteur - symétrie

- **DEFINITION**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que F et G sont supplémentaires dans E.

✎ On appelle **projecteur** (ou projection) sur F parallèlement à G l'application : $p : E \to E, x \mapsto y$ où y est la première composante de l'unique couple $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.

✎ On appelle **symétrie** sur F parallèlement à G l'application : $s : E \to E, x \mapsto y - z$ où y et z sont les composantes de l'unique couple $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.

- **PROPRIETE**

Si p et s sont les projecteur et symétrie sur F parallèlement à G alors p et s sont des endomorphismes de E et $s = 2p - Id_E$.

- **PROPRIETE**

Soit p un endomorphisme de E. Alors : p est un projecteur ssi $p \circ p = p$.
Le cas échéant p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - Id_E)$ parallèlement à $\ker(p) = \mathrm{Im}(p - Id_E)$.

- **PROPRIETE**

Soit s un endomorphisme de E. Alors : s est une symétrie ssi $s \circ s = Id_E$.
Le cas échéant s est la symétrie sur $\mathrm{Im}(s + Id_E) = \ker(s - Id_E)$ parallèlement à $\ker(s + Id_E) = \mathrm{Im}(s - Id_E)$.

- **PROPRIETE** - **DEFINITION**

Soient $F_1, \ldots, F_n$, n sous-espaces vectoriels de E de somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$
Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application $p_i : E \mapsto E$ qui à $x \in E$ associe $x_i \in F_i$ où $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $\forall j, x_j \in F_j$, est le projecteur d'axe F_i parallélement à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$.
Ces p_i sont appelés les projecteurs associés à la décomposition de E sous la forme $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.
Remarquons que l'on a pour $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0_{L(E)}$ et $Id_E = p_1 + \cdots + p_n$

Dem.

3.3 Familles de vecteurs

E désigne un $\mathbb{K}-$espace vectoriel .

3.3.1 Combinaisons linéaires

- **DEFINITION** *Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs*

Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle **combinaison linéaire des** $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tout vecteur x de E pouvant s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

- **DEFINITION** *Combinaison linéaire d'une famille quelconque de vecteurs*

Soit I un ensemble quelconque, éventuellement infini. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
On appelle **combinaison linéaire des** $(x_i)_{i\in I}$ tout vecteur x de E pouvant s'écrire sous la forme $x = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i$ avec J partie finie de I et pour tout $i \in J$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$
On peut aussi écrire : x combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$ s'il existe une famille de scalaires à support fini tel que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$

3.3.2 Sous-espace engendré par une partie

- **PROPRIETE** - **DEFINITION**

Soit A une partie de E. Il existe un et un seul plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant A.
On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par A et est noté $\mathrm{Vect}(A)$
Il s'agit de l'intersection de tous les sev de E contenant A. Il est inclus dans tous les sev de E qui contiennent A

- **PROPRIETE**

$\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A.
En particulier, si $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, alors $\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \middle| (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$.
De même, $A = (x_i)_{i\in I}$, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'espace des combinaisons linéaires des x_i

3.3.3 Familles génératrices

- **DEFINITION** *Famille génératrice finie.*

Soit $\mathscr{F} = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de n vecteurs de E. On dit que **$\mathscr{F}$ est génératrice** si $E = \mathrm{Vect}\{x_1, \ldots, x_n\}$ i.e. si tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in[1,n]}$

- **DEFINITION** *Famille génératrice quelconque.*

Soit I un ensemble quelconque, (éventuellement infini). Soit $\mathscr{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que **$\mathscr{F}$ est génératrice** si $E = \mathrm{Vect}\left\{x_i \middle| i \in I\right\}$ i.e. si tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$

- **PROPRIETE**

L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est génératrice.

Remarque : Si on ne sait rien de la surjectivité de l'application linéaire u, on peut juste dire que l'image par u d'une famille génératrice est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$

3.3.4 Familles libres

- **DEFINITION** *Famille libre finie.*

Soit $\mathscr{F} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de n vecteurs de E. On dit que **$\mathscr{F}$ est libre** si $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots, \lambda_n x_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$

- **DEFINITION** *Famille libre quelconque.*

Soit I un ensemble quelconque, (éventuellement infini). Soit $\mathscr{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que **$\mathscr{F}$ est libre** si toute sous-famille finie est libre i.e. pour toute sous-famille finie $(x_j)_{j \in J}$ de $(x_i)_{i \in I}$, on a $\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0_E \Longrightarrow \forall j \in J, \lambda_j = 0_{\mathbb{K}}$

- **DEFINITION**

Une **famille liée** est une famille qui n'est pas libre

- **PROPRIETE**

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

- **PROPRIETE**

L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.

3.3.5 Bases

- **DEFINITION**

Une **base** est une famille libre et génératrice

- **PROPRIETE - DEFINITION**

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de vecteurs de E. Alors pour tout vecteur x de E, il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires (i.e. les λ_i sont tous nuls sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux) telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$
Les λ_i s'appellent les coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$

- **THEOREME** *Détermination d'une application linéaire.*

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soient $(e_i)_{i \in I}$ une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.
Alors il existe une unique application linéaire u de E vers F vérifiant : $\forall i \in I, u(e_i) = f_i$

- **COROLLAIRE**

Pour montrer que deux applications linéaires sont égales, il suffit de démontrer qu'elles coïncident sur une base de E.

- **PROPRIETE**

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et u une application linéaire de E vers$F$. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Alors :

✎ u **est injective** $\iff$ $(u(e_i))_{i\in I}$ **est une famille libre de** F

✎ u **est surjective** $\iff$ $(u(e_i))_{i\in I}$ **est une famille génératrice de** F

✎ u **est bijective** $\iff$ $(u(e_i))_{i\in I}$ **est une base de** F

3.4 Espaces vectoriels de dimension finie

3.4.1 Notion de dimension

- **DEFINITION**

On dit qu'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E est **de dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

- **PROPRIETE - DEFINITION**

Un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E est de dimension finie possède au moins une base. Toutes les bases de E ont alors le même nombre d'éléments. Ce nombre commun est appelé dimension de E.

- **THEOREME *Théorème de la base incompléte***

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie n. Alors il existe $n-p$ vecteurs de E, $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$, tels que la famille $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de E.

- **PROPRIETE**

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie n et soit $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors :
$\mathscr{F}$ est une base de E $\iff$ $\mathscr{F}$ est une famille libre $\iff$ $\mathscr{F}$ est une famille génératrice

3.4.2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

- **THEOREME**

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie n. Alors :

✎ **Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie $p \leqslant n$**

✎ **Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors : $\dim(E) = \dim(F) \iff F = E$**

- **THEOREME**

✎ **Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E de dimension finie admet au moins un supplémentaire G.**

✎ **Une base de E obtenue en complétant une base de F par une base de G est appelée "base adaptée" à la décomposition de E en la somme directe $E = F \oplus G$**

✎ **On généralise : si $F_1, \ldots, F_q$ sont q sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{q} F_i$ alors la réunion d'une base de F_1, d'une base de F_2, ..., une base de F_q, est une base de E appelée "base adaptée" à la décomposition de E en somme directe des F_i**

- **PROPRIETE *Formule de Grassmann***

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. Alors :
$F + G$ est de dimension finie et $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

- COROLLAIRE *Caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie*

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E un espace de dimension finie. Alors : $E = F \oplus G \iff F \cap G = \{0\}$ **et** $\dim(E) = \dim F + \dim G \iff E = F + G$ **et** $\dim(E) = \dim F + \dim G$

- PROPRIETE

Soient $F_1, \dots, F_q$ q sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors : $\dim\left(\sum_{i=1}^{q} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{q} \dim(F_i)$.

De plus : $\dim\left(\sum_{i=1}^{q} F_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \dim(F_i) \iff$ **la somme** $\sum_{i=1}^{q} F_i$ **est directe.**

Dem.

3.4.3 Rang d'une application linéaire

- DEFINITION

Soit u une application linéaire. Si $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie, on appelle **rang de u** la dimension de l'image de u : $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$

- THEOREME

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, $u : E \to F$ une application linéaire. Alors si H est un supplémentaire dans E du noyau de u, la restriction de u à H est un isomorphisme de H vers $\mathrm{Im}(u)$

- THEOREME *Théorème du rang*

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels avec E de dimension finie. Soit u une application linéaire de E vers F. Alors : $\dim E = \dim(\ker(u) + \mathrm{rg}(u)$

- THEOREME *Caractérisation des isomorphismes en dimension finie*

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim E = \dim F$. Soit u une application linéaire de E vers F. Alors : u est un isomorphisme $\iff$ u est injective $\iff$ u est surjective
$\iff \exists v \in L(F,E); u \circ v = Id_F \iff \exists w \in L(F,E); w \circ u = Id_E$

- PROPRIETE

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et soient $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$ de rang fini. Alors $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$ **.**

- PROPRIETE *Invariance du rang par composition par un isomorphisme*

Si u et v sont deux applications linéaires avec u de de rang finie.
Si v isomorphisme alors $u \circ v$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(u)$.
Si w isomorphisme alors $w \circ u$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(w \circ u) = \operatorname{rg}(u)$.

3.4.4 Interpolation de Lagrange

On considère $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ $n+1$ scalaires distincts 2 à 2 et $(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ $n+1$ scalaires quelconques. On cherche à savoir s'il existe un/des polynomes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall i \in [\![0, n]\!], P(a_i) = y_i$.

- THEOREME

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ $n+1$ scalaires distincts 2 à 2. Alors l'application φ : $\begin{pmatrix} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)) \end{pmatrix}$ **est un isomorphisme.**
En particulier :
il existe un et un seul polynome $P_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0, n]\!], P_0(a_i) = y_i$.

- DEFINITION

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ $n+1$ scalaires distincts 2 à 2.
On pose pour $i \in [\![0, n]\!]$, $L_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$. les polynomes $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ sont appelés ***polynomes interpolateurs de Lagrange*** associés à la famille $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$

- PROPRIETE

La famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

- PROPRIETE

L'unique polynome polynome $P_0 \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0, n]\!], P_0(a_i) = y_i$ est : $P_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i L_i$.

- ***Exercice*** : Déterminer tous les polynomes P vérifiant $\forall i \in [\![0, n]\!], P(a_i) = y_i$

3.5 Formes linéaires et hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

- **DEFINITION**

  Le **dual** de E est l'espace $E^* = L(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E.

  Remarque Si E est de dimension finie, E^* est aussi de dimension finie et on a $\dim(E^*) = \dim(E)$

- **DEFINITION**

  On appelle **hyperplan** de E le noyau d'une forme linéaire non nulle.

- **PROPRIETE Définition équivalente**

  Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de *codimension* 1 i.e. un sous-espace vectoriel de E admettant un supplémentaire de dimension 1.

- **PROPRIETE**

  Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $\dim(E) - 1$

- **PROPRIETE**

  Soient φ et θ deux formes linéaires non nulles sur E. On suppose qu'elles ont le même noyau. Alors elles sont proportionnelles

3.6 Equations linéaires

- **DEFINITION**

  Une **équation linéaire** est une équation du type $u(x) = b$ $(\mathcal{E})$ où :

  ✔ u est une application d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F

  ✔ b est un élément de F

  ✔ l'inconnue x est dans E

  Le vecteur b est appelé *second membre* de l'équation linéaire.
  L'équation $\mathcal{E}_0$: $u(x) = 0$ est appelée l'*équation homogène* associée à $\mathcal{E}$

- **PROPRIETE**

  1. **L'ensemble S_0 des solutions $\mathcal{E}_0$ est un sous-espace vectoriel de E**
  2. **L'ensemble S des solutions de $\mathcal{E}$ est soit vide soit un sous-espace affine de direction S_0.**

3.7 Matrices

3.7.1 Matrices rectangulaires

On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$

- **PROPRIETE - DEFINITION**

**$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie : $n \times p$.
Plus précisément, une base est la famille $(E_{i,j})_{\substack{i \in [\![1,\, n]\!] \\ j \in [\![1,\, p]\!]}}$ constituée des matrices élémentaires , cette base étant appelée la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.**

- **DEFINITION** ***produit de matrices.***

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$. Alors la matrice $C = A \times B$ est la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ où, pour tout i et j, on a : $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j}$

- **PROPRIETE**

On note respectivement $E_{i,j}$, $E'_{i,j}$ et $E''_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. Alors : on a : $E_{i,j}\, E'_{k,\ell} = \delta_{j,k}\, E''_{i,\ell}$

- **DEFINITION**

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A, la matrice
$A^\top = \left(a'_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ où, pour tout (i,j), on a : $a'_{i,j} = a_{j,i}$

Remarque Une "ancienne" notation pour la transposée est ${}^tA = A^\top$

- **PROPRIETE**

**La transposition est linéaire et vérifie : $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AB)^\top = B^\top\, A^\top$
De plus : $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\left(A^\top\right)^\top = A$.**

3.7.2 Matrices carrées

- **PROPRIETE**

L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n est une $\mathbb{K}-$algèbre de dimension finie : n^2.

- ***Sous espaces particuliers de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$***

✎ L'ensemble $S_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques ($A^\top = A$) est un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$

✎ L'ensemble $A_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques ($A^\top = -A$) est un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$
Remarquons que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

✎ L'ensemble $D_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n

✎ L'ensemble $T_n^s(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$

✎ L'ensemble $T_n^i(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$

3.7.3 Matrices inversibles

- DEFINITION

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** si il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n = BA$. Le cas échéant, B est unique, est appelée inverse de A et est notée A^{-1}

- **PROPRIETE - DEFINITION**

L'ensemble $Gl_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles d'ordre n est un groupe, appelé groupe linéaire d'ordre n .

- **PROPRIETE**

Pour Aet B dans $Gl_n(\mathbb{K})$, on a : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.

- **PROPRIETE**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :
A inversible $\iff \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \big| AB = I_n \iff \exists C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \big| CA = I_n$

3.7.4 Matrices d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire

- DEFINITION

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $x \in E$.

On appelle **matrice de x dans la base $\mathscr{B}$** , la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$ avec $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$

- DEFINITION *Matrice d'une famille de vecteurs*

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E. On appelle **matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$** , la matrice A d'ordre (n,p) définie par $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ où pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, i.e., la matrice d'ordre (n,p) dont la $j-$ième colonne est constituée des coordonnées de u_j dans la base $\mathscr{B}$ pour tout j.

- DEFINITION *Matrice d'une application linéaire.*

Soit $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F Soit u une application linéaire de E vers F.
On appelle **matrice de u dans les bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F** , la matrice A d'ordre (n,p) définie par $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ où pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $u(\varepsilon_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, i.e., la matrice d'ordre (n,p) dont la $j-$ième colonne est constituée des coordonnées de $u(\varepsilon_j)$ dans la base $\mathscr{C}$

- DEFINITION *Matrice d'un endomorphisme.*

Soit $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de E et u un endomorphisme de E. On appelle **matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ de E** , la matrice A carrée d'ordre n définie par $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$ où pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $u(\varepsilon_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \varepsilon_i$, i.e., la matrice carrée d'ordre n dont la $j-$ième colonne est constituée des coordonnées de $u(\varepsilon_j)$ dans la base $\mathscr{B}$

- **PROPRIETE**

Etant données une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F. Soit $x \in E$, $y \in F$ et u une application linéaire de E vers F. On pose X, Y et A les matrices respectives de x, y et u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$: $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(y)$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$y = u(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y = AX$$

- **PROPRIETE**

Etant données une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F, l'application qui à $u \in L(E,F)$ associe $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, est un isomorphisme de $L(E,F)$ vers $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

- **PROPRIETE**

Soient une base $\mathscr{B}$ de E, une base $\mathscr{C}$ de F et une base $\mathscr{D}$ de G. Soient u une application linéaire de E vers F, et v une application linéaire de F vers G. Alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) = \mathrm{mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.

3.7.5 Formules de changement de bases, matrices équivalentes et matrices semblables

- **DEFINITION**

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$** , la matrice $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Remarque La matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ est aussi la matrice de Id_E dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$

- **PROPRIETE** ***Formule de changement de bases pour les vecteurs***

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On pose P matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$. Soit $x \in E$. On note X la matrice de x dans la base $\mathscr{B}$ et X' la matrice de x dans la base $\mathscr{B}'$. Alors $\boxed{X = P\,X'}$.

- **PROPRIETE** ***Formule de changement de bases pour les applications linéaires***

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}'$. Soit u une application linéaire de E vers F. On note $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$. Alors $\boxed{A' = Q^{-1} A\, P}$

- **PROPRIETE** ***Formule de changement de bases pour les endomorphismes***

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$. Soit u un endomorphisme de E. On note $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u)$. Alors $\boxed{A' = P^{-1} A\, P}$

- **DEFINITION**

☞ Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$. On dit que A et B sont **équivalentes** s'il existe $P \in Gl_p(\mathbb{K})$ et $Q \in Gl_n(\mathbb{K})$ telles que $\quad B = Q^{-1} A\, P$

☞ Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On dit que A et B sont **semblables** s'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ telle que $\quad B = P^{-1} A\, P$

Remarque : les relations d'équivalence des matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de similitude des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont des relations d'équivalence.

- **PROPRIETE**

Soient $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ telles que $B = P^{-1}A\,P$. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $Q(B) = P^{-1}Q(A)\,P$

3.7.6 Rang d'une matrice

- **DEFINITION**

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B}_p$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et u l'application linéaire canoniquement associée à A i.e $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}(u)$. On appelle **rang de A** (et on note $\mathrm{rg}A$) le rang de u. C'est aussi le rang de la famille des vecteurs colonnes de A.

- **PROPRIETE**

Si u est une application linéaire et A une matrice qui représente u dans deux bases quelconques. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u)$.

- **THEOREME**

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit r le rang de A. Alors il existe $U \in Gl_p(\mathbb{K})$ et $V \in Gl_n(\mathbb{K})$ telles que $A = U\,J_r\,V$ où J_r est la matrice $J_r = \left(\begin{array}{c|c} (I_r) & (O_{r,p-r}) \\ \hline (O_{n-r,r}) & (O_{n-r,p-r}) \end{array}\right)$.

- **COROLLAIRE**

Si A est une matrice, alors $\mathrm{rg}\left(A^\top\right) = \mathrm{rg}(A)$.

- **PROPRIETE**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :
$A \in Gl_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{rg}A = n \iff$ **A est la matrice d'un automorphisme de $\mathbb{K}^n$**

- **DEFINITION** *Opération élémentaire*

On appelle **opération élémentaire** sur une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'une des six opérations suivantes :

$C_i \longleftarrow \lambda C_i$	$(\lambda \neq 0)$	**Dilatation**	Multiplication de C_i par un scalaire non nul
$C_i \longleftrightarrow C_j$		**Transposition**	Échange des colonnes C_i et C_j
$C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$	$(\lambda \in \mathbb{K})$	**Transvection**	Ajout à C_i d'un multiple de C_j (avec $i \neq j$)
$L_i \longleftarrow \lambda L_i$	$(\lambda \neq 0)$	**Dilatation**	Multiplication de L_i par un scalaire non nul
$L_i \longleftrightarrow L_j$		**Transposition**	Échange des lignes L_i et L_j
$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$	$(\lambda \in \mathbb{K})$	**Transvection**	Ajout à L_i d'un multiple de L_j (avec $i \neq j$)

- **PROPRIETE**

  - ✎ **Effectuer une opération élémentaire sur une ligne ou une colonne d'une matrice revient à multiplier celle-ci par une matrice inversible.**
  - ✎ **On ne change pas le rang d'une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de celle-ci**

- **PROPRIETE**

Une matrice T carrée triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
Le cas échéant l'inverse de T est une matrice triangulaire (de même "coté" que T) dont les coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de T.

- **PROPRIETE**

Une matrice D diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
Le cas échéant l'inverse de D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de D.

3.7.7 Matrice par blocs

- **DEFINITION**

Une **matrice par blocs** , décomposée en 2×2 blocs, est une matrice de la forme

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_{1,1} & \dots & b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & b_{n,1} & \dots & b_{n,q} \\ \hline c_{1,1} & \dots & c_{1,p} & d_{1,1} & \dots & d_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & \dots & c_{m,p} & d_{m,1} & \dots & d_{m,q} \end{array}\right)$$

A et B ayant même hauteur, tout comme C et D. A et C ayant même largeur, tout comme B et D.

- **DEFINITION**

Une **matrice par blocs** , décomposée en $n \times p$ blocs, est une matrice de la forme
$M = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{n,1} & \dots & A_{n,p} \end{array}\right)$ où les différentes matrices $A_{i,j}$ ont les "bonnes" dimensions

Pour des matrices par blocs de tailles compatibles, on peut effectuer une combinaison linéaire de telles matrices ainsi que calculer la transposée. A titre d'exemples, on a si α et β sont deux scalaires et M et M' sont les matrices $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ et $M' = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right)$, alors $\alpha M + \beta M' = \left(\begin{array}{c|c} \alpha A + \beta A' & \alpha B + \beta B' \\ \hline \alpha C + \beta C' & \alpha D + \beta D' \end{array}\right)$.

Avec les mêmes notations, on a $M^\top = \left(\begin{array}{c|c} A^\top & C^\top \\ \hline B^\top & D^\top \end{array}\right)$

- **PROPRIETE** ***Produit matriciel par blocs***

Soient M et M' deux matrices par blocs (décomposées en 2×2 blocs), avec des blocs de tailles compatibles avec les produits matriciels, $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ et $M' = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right)$.
Alors $M\,M' = \left(\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array}\right)$

- **PROPRIETE** ***Produit matriciel par blocs***

Soient M et M' deux matrices par blocs (décomposées en blocs compatibles avec les produits matriciels), $M = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{n,1} & \dots & A_{n,p} \end{array}\right)$ et $M' = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{1,1} & \dots & B_{1,q} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_{p,1} & \dots & B_{p,q} \end{array}\right)$. Alors $M\,M' = \left(\begin{array}{c|c|c} C_{1,1} & \dots & C_{1,q} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline C_{n,1} & \dots & C_{n,q} \end{array}\right)$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]\,, C_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}$

Exercice - Si $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right)$, calculer A^2

- **PROPRIETE** ***Matrice triangulaire par blocs***

Soient $P \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), Q \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ **et** $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$**. On pose** $M = \left(\begin{array}{c|c} P & A \\ \hline 0 & Q \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{p+q}(\mathbb{K})$**. Si** P **et** Q **sont inversibles, alors** M **est également inversible et on a** M^{-1} **de la forme** $M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} P^{-1} & B \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right)$

Dem.

- **PROPRIETE** ***Matrice diagonale par blocs***

Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ **et** $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{p+q}(\mathbb{K})$**. On suppose que** A **et** B **sont inversibles. Alors :**

1. M **est inversible d'inverse** $M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array}\right)$
2. **Si** $P \in \mathbb{K}[X]$**,** $P(M) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & 0 \\ \hline 0 & P(B) \end{array}\right)$

- **Remarque** Ces résultats se généralisent sans peine pour les matrices avec plus de blocs

3.7.8 Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme

- **DEFINITION**

Soit $A = (a_{i,j})_{1,\leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle **trace de A** le scalaire $\operatorname{tr}(A)$ défini par : $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ (somme des coefficients diagonaux)

- **PROPRIETE**

1. **L'application** $\operatorname{tr} : \left(\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longmapsto & \mathbb{K} \\ A & \longrightarrow & \operatorname{tr}(A) \end{array}\right)$ **est une forme linéaire**
2. $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}\left(A^\top\right) = \operatorname{tr}(A)$
3. $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2, \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$
4. **Deux matrices semblables ont la même trace**

Dem.

- **DEFINITION**

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$. $\operatorname{tr}(\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u))$ ne dépend pas de la base de E choisie. On appelle cette valeur commune la **trace de u** .

- **PROPRIETE**

L'application qui à un endomorphisme associe sa trace est une forme linéaire.

- **PROPRIETE**

Soit E **un** $\mathbb{K}-$**espace vectoriel de dimension finie et** p **un projecteur de** E**. Alors** $\operatorname{rg}(p) = \operatorname{tr}(p)$

Dem.

3.8 Déterminants

3.8.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

- **THEOREME** ***Théorème fondamental sur les déterminants .***

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n.

1. **L'ensemble des formes $n-$linéaires alternées sur E^n est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie 1.**
2. **Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors l'application qui à la famille $\mathscr{F} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ telle que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, associe $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}$ est une forme $n-$linéaire alternée sur E^n non nulle. Cette valeur $\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est appelée déterminant de la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.**

On rappelle que $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

- **PROPRIETE**

✎ **On ne change pas le déterminant en ajoutant à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs**

✎ **Le déterminant d'une famille liée est nul**

✎ **Une famille $\mathscr{F}$ de n vecteurs de E est une base de E ssi $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$**

- **PROPRIETE** ***Formule de changement de bases***

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E. Alors $\boxed{\det_{\mathscr{C}} = \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}} = \dfrac{1}{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})} \times \det_{\mathscr{B}}}$

3.8.2 Déterminant d'un endomorphisme

- **DEFINITION**

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in L(E)$. Il existe un unique scalaire noté $\det(u)$, appelé déterminant de u, tel que pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de E, on ait :
$\boxed{\det_{\mathscr{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)}$

- **PROPRIETE**

$\forall (u, v) \in (L(E))^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\det(Id_E) = 1$
2. $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$
3. $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$
4. u **est un automorphisme** $\iff$ $\det(u) \neq 0$. **Dans ce cas,** $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$

3.8.3 Déterminant d'une matrice carrée

- DEFINITION

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant** de A le déterminant de la famille des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Ainsi $$\boxed{\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}}$$

- PROPRIETE

Si A est une matrice triangulaire, $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux.

- PROPRIETE

Soit $\mathscr{B}$ est une base de E et $u \in L(E)$. Alors $\det(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)) = \det(u)$.

- PROPRIETE

$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. $\det(A^\top) = \det(A)$
4. A **est inversible** $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$. **Dans ce cas,** $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

- Corollaire

Deux matrices semblables ont le même déterminant

- PROPRIETE *Opérations sur les lignes et les colonnes d'un déterminant*

- ✎ **Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes (ou lignes) proportionnelles est nul**
- ✎ **Le déterminant d'une matrice dont une colonne (resp . ligne) est combinaison linéaires des autres colonnes (resp. lignes) est nul**
- ✎ **Faire subir à une matrice une transposition multiplie son déterminant par -1**
- ✎ **Faire subir à une matrice une transvection laisse invariant le déterminant.**
- ✎ **Faire subir à une matrice une dilatation de rapport λ multiplie son déterminant par λ**

Remarque On peut également effectuer des transvections par blocs qui consistent en des transvections usuelles faites simultanément mais où les rangées ajoutées ne sont pas parmi les rangées transformées. Par exemple pour une matrice $2n \times 2n$ constituée de 4 blocs (n,n), les opérations $C_i \leftarrow C_i + \lambda_i C_{i+n}$ pour $i_i n \, [\![1,n]\!]$ forment une transvection par blocs.
Le déterminant est également invariant par transvection par bloc.

- PROPRIETE *Développement par rapport à une ligne ou une colonne.*

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

✎ **Développement par rapport à la $i-$ième ligne :** $\boxed{\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,(-1)^{i+j}\,\Delta_{i,j}}$

✎ **Développement par rapport à la $j-$ième colonne :** $\boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\,(-1)^{i+j}\,\Delta_{i,j}}$

où $\Delta_{i,j}$ désigne le déterminant de taille $(n-1)\times(n-1)$ obtenu à partir de A en supprimant la $i-$ième ligne et la $j-$ième colonne de A.

- DEFINITION

✎ $\Delta_{i,j}$ s'appelle le **mineur d'indice(i,j)** de A

✎ $(-1)^{i+j}\,\Delta_{i,j}$ s'appelle le **cofacteur d'indice(i,j)** de A

✎ On appelle **comatrice** de A, notée $\mathrm{com}(A)$, la matrice des cofacteurs de A

- PROPRIETE

$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\boxed{A \times (\mathrm{com}(A))^\top = (\mathrm{com}(A))^\top \times A = \det(A)\, I_n}$

- COROLLAIRE

Si $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,(\mathrm{com}(A))^\top}$.

En particulier, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

- PROPRIETE

Si A est une matrice triangulaire par blocs de la forme $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_{p,p} \end{pmatrix}$ **alors**

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{p} \det(A_{i,i})$$

3.8.4 Exercices et résultats classiques

1. **Déterminant de Vandermonde** : Déterminer le déterminant $V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

   On montrera $\boxed{V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)}$

2. **Déterminants tridiagonaux** : Calculer le déterminant $n \times n$: $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

   On cherchera une relation de récurrence liant $\Delta_{n+2}, \Delta_{n+1}$ et Δ_n

3. **Formules de Cramer** : On considère le système linéaire $n \times n$ s'écrivant matriciellement : $AX = B$ où $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On suppose que A est une matrice inversible. Montrer que ce système (dit *système de Cramer*) possède une unique solution et que cette solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est telle que : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{x_j = \dfrac{1}{\det(A)} \times \det(C_1, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n)}$ où les C_k sont les colonnes de A