Chapitre 4

Réduction des endomorphismes

Contents

4.1 Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

E est un $\mathbb{K}$ espace-vectoriel ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E.

4.1.1 Sous-espaces stables par u

4.1.1.1 Définitions

- DEFINITION

  Un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable par u** lorsque $u(F) \subset F$.

- DEFINITION

  Si F sev de E est stable par u, $u_{||F} : \begin{pmatrix} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de F appelé **endomorphisme induit** par u sur F.

- **Attention** à ne pas confondre l'endomorphisme induit par u sur F : $u_{||F}$: $\begin{pmatrix} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{pmatrix}$ qui est un endomorphisme de F (et qui n'est défini que si F est un sev de E stable par u) avec la restriction de u à F :
  $u_{|F}$: $\begin{pmatrix} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u(x) \end{pmatrix}$ qui est une application linéaire de F vers E (et qui est définie pour tout sev F de E).

- **Exemple** : Si $E = F \oplus G$ et p est la projection sur F parallèlement à G, alors $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$ sont stables par p et $p_{||F} = \mathrm{Id}_F$ et $p_{||G} = 0_{L(G)}$.

4.1.1.2 Propriétés

- PROPRIETE

  Si $v \in \mathcal{L}(E)$ et commute avec u, alors $\ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont des sev de E stables par u.

  Dem.

- PROPRIETE

  Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, $\ker(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont des sev de E stables par u.

  Dem.

4.1.1.3 Lien avec les matrices

Désormais E est supposé de dimension finie n, F est un sev de E de dimension p avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$ et $\mathcal{B}_F = (e_1, .., e_p)$ une base de F. G est un supplémentaire de F dans E et $\mathcal{B}_G = (e_{p+1}, .., e_n)$ une base de G. Rappel : $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ est une base de $E = F \oplus G$.

- **PROPRIETE**

F est stable par u si et seulement si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire par blocs de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. B est la matrice de $u_{||F}$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Dem.

- Réciproquement, si dans une base $\mathcal{B}' = (e'_1, .., e'_n)$ de E, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ est triangulaire par blocs de la forme $\begin{pmatrix} B' & C' \\ 0 & D' \end{pmatrix}$ avec $B' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D' \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, alors $F' = \mathrm{Vect}(e'_1, .., e'_p)$ est un sev de E stable par u, et B' est la matrice de $u_{||F'}$ dans la base $(e'_1, .., e'_p)$ de F'.

- **PROPRIETE**

F et G sont stables par u si et seulement si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. Dans ce cas, B est la matrice de $u_{||F}$ dans la base $\mathcal{B}_F$ et D la matrice de $u_{||G}$ dans la base $\mathcal{B}_G$.

- Réciproquement, si dans une base $\mathcal{B}' = (e'_1, .., e'_n)$ de E, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$ avec $B' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D' \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, alors $F' = \mathrm{Vect}((e'_1, .., e'_p)$ et $G' = \mathrm{Vect}((e'_{p+1}, .., e'_n)$ sont deux sev de E stables par u (et supplémentaires dans E). De plus B' est la matrice de $u_{||F'}$ dans la base $(e'_1, .., e'_p)$ de F' et D' est la matrice de $u_{||G'}$ dans la base $(e'_{p+1}, .., e'_n)$ de G'
- Ces deux propriétés se généralisent à la décomposition de E en somme directe d'un nombre fini de sev de E stables par u.

4.1.1.4 Polynômes d'un endomorphisme induit

E est un $\mathbb{K}$ espace-vectoriel, u un endomorphisme de E et F un sous espace-vectoriel de E stable par u.

- **PROPRIETE**

Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, F est stable par $P(u)$ et $(P(u))_{||F}$, endomorphisme induit par $P(u)$ sur F est $P(u_{||F})$.

Dem.

- **PROPRIETE**

$Ann(u) \subset Ann(u_{||F})$.

Dem.

- **PROPRIETE**

Si u a un polynôme minimal (ce qui est toujours le cas lorsque E est de dimension finie), alors $u_{||F}$ a un polynôme minimal et $\pi_{u_{||F}}$ divise π_u.

Dem.

4.1.2 Vecteurs propres, valeurs propres de u

4.1.2.1 Droites stables, vecteurs propres

- **PROPRIETE**

Soit $d \in E$, $d \neq 0_E$, et $D = \text{Vect}(d)$: D est stable par u si et seulement si $\exists \mu \in \mathbb{K}$, $u(d) = \mu d$.

Dem.

- **DEFINITION**

Un vecteur x de E est dit **vecteur propre** de u lorsque $x \neq 0_E$ et la droite $\text{Vect}(x)$ est stable par u c'est à dire lorsque : $\exists \mu \in \mathbb{K}$, $u(x) = \mu x$. Le scalaire μ est alors unique, c'est la valeur propre associée au vecteur propre x.

4.1.2.2 Valeurs propres

- **DEFINITION**

Un scalaire $\mu \in \mathbb{K}$ est dit **valeur propre** de u lorsque $\exists x \neq 0_E \,/\, u(x) = \mu x$ c'est à dire lorsque $\ker(\mu I_d - u) \neq \{0_E\}$. Les vecteurs $x \neq 0_E$ tels que $u(x) = \mu x$ sont les vecteurs propres associés à la valeur propre μ.

4.1.3 Sous-espaces propres de u

4.1.3.1 Définitions

- **DEFINITION**

L'ensemble des valeurs propres de u se nomme **spectre de u** et sera noté $\text{Sp}(u)$.

- **DEFINITION**

Pour $\mu \in \text{Sp}(u)$, le **sous espace propre associé à la valeur propre μ** est l'espace $E_\mu(u) = \ker(\mu I_d - u)$. Il se compose de 0_E et des vecteurs propres associés à la valeur propre μ. Si E est de dimension finie, $\dim(E_\mu(u)) = \dim(E) - \text{rg}(\mu I_d - u)$

4.1.3.2 Propriétés

- **PROPRIETE**

Si v commute avec u, les sous espaces propres de u sont stables par v.

Dem.

- **PROPRIETE**

Si $\mu \in \text{Sp}(u)$, $E_\mu(u)$ est stable par u et l'endomorphisme induit par u sur $E_\mu(u)$ est l'homothétie de rapport μ.

Dem.

- **PROPRIETE**

Si $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sont p valeurs propres distinctes de u, alors $\sum_{k=1}^{p} E_{\mu_k}(u) = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\mu_k}(u)$

Dem.

- **PROPRIETE**

Si $x_1, \ldots, x_p$ sont p vecteurs propres de u, associés à des valeurs propres distinctes, alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est un système libre.

Dem.

- **COROLLAIRE**

si E est de dimension fine n, alors u admet au maximum n valeurs propres distinctes.

4.1.4 Propriétés

4.1.4.1 Eléments propres des polynômes de u

Soit P un polynôme non nul à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

- **PROPRIETE**

Si μ est une valeur propre de u et x un vecteur propre associé à μ, alors $[P(u)](x) = P(\mu).x$ donc $P(\mu)$ est valeur propre de $P(u)$, et x est un vecteur propre de $P(u)$ pour cette valeur propre.

Dem.

- **PROPRIETE**

Si P est un polynôme annulateur de u, les valeurs propres de u sont parmi les racines du polynôme P.

Dem.

- **PROPRIETE**

Si u admet un polynôme minimal (ce qui est toujours le cas lorsque E est de dimension finie), il a un nombre fini de valeurs propres car $\{t \in \mathbb{K},\ \pi_u(t) = 0\}$ est un ensemble fini.

Dem.

4.1.4.2 Exemples

On suppose que $E = F \oplus G$ avec $F \neq \{0_E\}$ et $G \neq \{0_E\}$

- Si u est l'homothétie de rapport k alors, $\mathrm{Sp}(u) = \{k\}$ et $E_k(u) = E$.
- Si u est la projection sur F parallèlement à G : $\mathrm{Sp}(u) = \{0, 1\}$, $E_1(u) = F$ et $E_0(u) = G$.
- Si u est la symétrie sur F parallèlement à G : $\mathrm{Sp}(u) = \{-1, 1\}$, $E_1(u) = F$ et $E_{-1}(u) = G$.

4.1.5 Eléments propres d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

4.1.5.1 Définitions

- **Rappel** : L'**endomorphisme canoniquement associé** à A est l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{K}^n$ est A.
- Si $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, u est défini par : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $u(\varepsilon_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$
- **DEFINITION**

  Les **valeurs propres** de A sont celles de u, leur ensemble, le **Spectre de** A , est noté $Sp_{\mathbb{K}}(A)$ (ou seulement $Sp(A)$ si aucune confusion n'est possible). $Sp_{\mathbb{K}}(A)$ a donc au plus n éléments dans $\mathbb{K}$.
- **PROPRIETE**

  $\mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A) \Leftrightarrow \exists x \neq 0 \mid u(x) = \mu x \Leftrightarrow$ **il existe une colonne** $X \neq 0$ **telle que** $AX = \mu X$.

  Cela signifie que le système linéaire $AX = \mu X$ ou $(\mu I_n - A)X = 0$ n'est pas un système de Cramer, que la matrice $\mu I_n - A$ n'est pas inversible, que $\mathrm{rg}(\mu I_n - A) < n$, que $\det(\mu I_n - A) = 0$.
- **PROPRIETE**

  Les vecteurs propres de A sont les colonnes qui représentent les vecteurs propres de u dans la base canonique : Si X est une colonne de n scalaires du corps $\mathbb{K}$, c'est un vecteur propre de A si et seulement si : $X \neq 0$ et $\exists \mu \in \mathbb{K} \mid AX = \mu X$.
- **PROPRIETE**

  Si $\mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$, le sous-espace propre de A associé à μ est $E_\mu(A) = \left\{ \texttt{colonnes } X \mid AX = \mu X \right\}$, c'est donc le "noyau" de $\mu I_n - A$, qui, d'après le théorème du rang a pour dimension $n - rg(\mu I_n - A)$.
- **Attention** , $\mathbb{R}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$, A, matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est aussi une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on a seulement $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset Sp_{\mathbb{C}}(A)$.
- **PROPRIETE**

  Deux matrices semblables ont le même spectre

  Dem.

4.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dim. finie, d'une matrice carrée

On se donne :
ou bien E un $\mathbb{K}$ espace-vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, muni d'une base $\mathcal{B}$, u un endomorphisme de E et on pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
ou bien $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. On est alors dans le premier cas avec $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ sa base canonique.

4.2.1 Caractérisation des valeurs propres

4.2.1.1 Polynôme caractéristique

- PROPRIETE

Soit $\mu \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathrm{Sp}(u) \Leftrightarrow \exists x \neq 0 \mid u(x) = \mu x \Leftrightarrow \mu Id - u$ n'est pas injectif $\Leftrightarrow \mu Id - u$ n'est pas bijectif $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(\mu Id - u) < n \Leftrightarrow \det(\mu Id - u) = 0$

Dem.

- DEFINITION

$\chi_u : \begin{pmatrix} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mu & \longmapsto & \det(\mu Id - u) \end{pmatrix} = \chi_A : \begin{pmatrix} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mu & \longmapsto & \det(\mu I_n - A) \end{pmatrix}$ est un polynôme. On le nomme **polynôme caractéristique** de u (ou de A), les valeurs propres de u (ou A) sont les racines de χ_u (de χ_A) qui sont dans le corps $\mathbb{K}$.

- PROPRIETE

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Dem.

- PROPRIETE

$\chi_u = \chi_A$ est de degré n et unitaire. $\chi_u = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(u)$.

Dem.

- **Exemple** : si $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est triangulaire (ou mieux, diagonale), $\chi_A = (X - a_{11})(X - a_{22}) \ldots (X - a_{nn})$

4.2.1.2 Multiplicité des valeurs propres

- DEFINITION

Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(u)$. La **multiplicité de μ** est sa multiplicité en tant que racine de χ_u.

- PROPRIETE

**μ est valeur propre de u avec une multiplicité égale à m si et seulement si :
(1) : $(X-\mu)^m$ divise χ_u et $(X-\mu)^{m+1}$ ne le divise pas.
ou (2) : $\forall k \in [\![0, m-1]\!]$, $\chi_u^{(k)}(\mu) = 0$ et $\chi_u^{(m)}(\mu) \neq 0$.**

Dem.

- On peut ainsi donner deux présentations des valeurs propres de u :
  * **Sans répétition** : $\mu_1, \ldots, \mu_p$; les μ_i étant deux à deux distincts, μ_i ayant pour ordre de multiplicité m_i.

* **Avec répétition** : $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$; une valeur propre d'ordre m figurant m fois dans la liste.

- PROPRIETE

Si χ_u est scindé sur le corps $\mathbb{K}$ (ce qui sera toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on a avec les notations précédentes :

* $N = n = m_1 + \ldots + m_p$
* $\chi_u = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k) = \prod_{i=1}^{p}(X - \mu_i)^{m_i}$
* $\mathrm{tr}(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{i=1}^{p} m_i\mu_i$
* $\det(u) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \prod_{i=1}^{p} \mu_i^{m_i}$

Dem.

4.2.1.3 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

- PROPRIETE

Si F est un sous espace vectoriel de E stable par u, alors $\chi_{u_{||F}}$ divise χ_u.

Dem.

- PROPRIETE

Si $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_k$ où les F_j sont des sous espaces vectoriels de E stables par u, alors $\chi_u = \chi_{u_{||F_1}} \times \ldots \times \chi_{u_{||F_k}}$

Dem.

- COROLLAIRE

* **Si $\mu \in \mathrm{Sp}(u)$, avec la multiplicité $m(\mu)$: $1 \leqslant \dim(E_\mu(u)) \leqslant m(\mu)$.**
* **Si μ est valeur propre simple de u, $E_\mu(u)$ est une droite vectorielle.**
* **Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples $\mu_1, \ldots, \mu_n$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\mu_i}(u)$**
* **Si χ_u n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, alors $E \neq \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\mu_i}(u)$**

Dem.

4.2.2 Liens avec le polynôme minimal

u étant un endomorphisme d'un espace de dimension finie, l'existence de π_u est assurée.

4.2.2.1 Valeurs propres

- **PROPRIETE**

  $\forall \mu \in \mathbb{K},\ \mu \in Sp(u) \Leftrightarrow \pi_u(\mu) = 0$

  Dem.

- χ_u et π_u ont dans $\mathbb{K}$ les mêmes racines : les valeurs propres de u.
- La multiplicité d'une valeur propre, est son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_u.

4.2.2.2 Théorème de Cayley-Hamilton

THEOREME Théorème de Cayley-Hamilton (admis)

- $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- $\chi_u \in \mathrm{Ann}(u)$.
- π_u **divise** χ_u.

Remarque : Ces trois formulations sont équivalentes.

4.2.2.3 Corollaires

PROPRIETE

- $\deg(\pi_u) \leqslant n$.
- $\dim(\mathbb{K}[u]) \leqslant \dim(E)$.
- **Si** u **a pour valeurs propres distinctes** $\mu_1, \dots, \mu_p$, **avec** μ_i **de multiplicité** m_i, **alors :** $\forall i \in [\![1, p]\!]$ μ_i **est racine de** π_u **avec une multiplicité** $n_i \in [\![1, m_i]\!]$.
- **Si** χ_u **est scindé à racines simples, alors** $\pi_u = \chi_u$.

Dem.

4.3 Réduction des endomorphismes en dimension finie, des matrices carrées

On se donne :
ou bien E un $\mathbb{K}$ espace-vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, muni d'une base $\mathcal{B}$, u un endomorphisme de E et on pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
ou bien $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

$\mu_1, \ldots, \mu_p$ sont les valeurs propres distinctes de u (i.e. les valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$), μ_i ayant pour multiplicité m_i.

4.3.1 Diagonalisation

4.3.1.1 Diagonalisation

4.3.1.2 Définitions

- **DEFINITION**

  u est dit **diagonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale. Si une telle base existe, elle est constituée de vecteurs propres.

- **DEFINITION**

  $\mathcal{B}' = (e_1, \ldots, e_n)$, base de E, est une **base propre pour** u si et seulement si $e_1, \ldots, e_n$ sont des vecteurs propres pour u (c'est à dire si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ est une matrice diagonale).

  Exemples Les projecteurs et les symétries dans un espace de dimension finie sont diagonalisables.

4.3.1.3 Caractérisations

- **PROPRIETE**

  u **est diagonalisable si et seulement si** $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\mu_i}(u)$

  Dem.

- **PROPRIETE**

  u **est diagonalisable si et seulement si** $E = \sum_{i=1}^{p} E_{\mu_i}(u)$

  Dem.

- **PROPRIETE**

  u **est diagonalisable si et seulement si** $\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\mu_i}(u))$

  Dem.

- **PROPRIETE**

u est diagonalisable si et seulement si
χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\dim(E_{\mu_i}(u)) = m_i$

Dem.

- **COROLLAIRE**

Si χ_u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable

Attention : On n'a pas la réciproque : tous les projecteurs, toutes les symétries, tous les endomorphismes possédant une base propre sont diagonalisables mais, dès que la dimension d'un sous-espace propre est supérieure ou égale à 2, le polynome caractéristique n'est pas à racines simples

Dem.

- **DEFINITION**

A est **diagonalisable** si et seulement si
A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- **PROPRIETE**

A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

Dem.

- **PROPRIETE**

A est diagonalisable si et seulement si
χ_A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\dim(E_{\mu_i}(A)) = m_i$

Dem.

- **PROPRIETE**

A est diagonalisable si et seulement si
χ_A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\text{rg}(\mu_i I_n - A) = n - m_i$

Dem.

- **PROPRIETE**

u est diagonalisable si et seulement si
l'idéal annulateur de u contient un polynôme scindé à racines simples de $\mathbb{K}[X]$.

Dem.

- **PROPRIETE**

u est diagonalisable si et seulement si π_u est un polynôme scindé à racines simples de $\mathbb{K}[X]$.

Dem.

- **PROPRIETE**

A est diagonalisable si et seulement si l'idéal annulateur de A contient un polynôme scindé à racines simples de $\mathbb{K}[X]$.

Dem.

- **PROPRIETE**

A est diagonalisable si et seulement si π_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}[X]$.

Dem.

4.3.1.4 Exemples et conséquences

- Si u est un projecteur, alors u est diagonalisable et $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{tr}(u)$.
- Si u est une symétrie, alors u est diagonalisable.
- Si χ_u est un polynôme scindé à racines simples de $\mathbb{K}[X]$ alors u est diagonalisable.
- u est diagonalisable si et seulement si $\pi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - \mu_i)$
- u est diagonalisable si et seulement si $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - \mu_i)$ est un polynôme annulateur de u.
- Si u est diagonalisable, les endomorphismes induits par u sur des sous espaces de E stables par u sont diagonalisables.

4.3.2 Trigonalisation

4.3.2.1 Définitions

- **DEFINITION**

u est dit **trigonalisable** lorsque il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

- **DEFINITION**

A est **trigonalisable** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4.3.2.2 Caractérisations

- **PROPRIETE**

A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est trigonalisable.

Dem.

- **PROPRIETE**

u est trigonalisable si et seulement si il existe des sous espaces $F_1, \ldots, F_n$ de E stables par u et tels que : $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n$sont stables par u et $\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \dim(F_k) = k$.

Dem.

- **PROPRIETE**

u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

- **PROPRIETE**

A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si χ_A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Dem.

- **PROPRIETE**

Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie, alors u est trigonalisable.

Dem.

- **PROPRIETE**

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En particulier, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera au moins trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Dem.

- **PROPRIETE**

Si u est trigonalisable, $\det(u) = \prod_{\mu \in Sp(u)} \mu^{mult(\mu)}$ et $\mathrm{tr}(u) = \sum_{\mu \in Sp(u)} mult(\mu)\mu$.

- **PROPRIETE**

Si A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$\det(A) = \prod_{\mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)} \mu^{mult(\mu)}$ et $\mathrm{tr}(A) = \sum_{\mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)} mult(\mu)\mu$.

Dem.

- **PROPRIETE**

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A) = \prod_{\mu \in Sp_{\mathbb{C}}(A)} \mu^{mult(\mu)}$ et $\operatorname{tr}(A) = \sum_{\mu \in Sp_{\mathbb{C}}(A)} mult(\mu)\mu$.

Dem.

4.3.2.3 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

- **DEFINITION**

u endomorphisme de E est dit **nilpotent** lorsque : $\exists p \in \mathbb{N}^* \mid u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$

- **DEFINITION**

Si u est nilpotent, $\left\{p \in \mathbb{N}^* \mid u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}\right\}$ a un minimum $N(u)$, l'**indice de nilpotence** de u.

- **DEFINITION**

A matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** si et seulement si $\exists p \in \mathbb{N}^* \mid A^p = 0$.

- **PROPRIETE**

A est nilpotente si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à A est nilpotent.

Dem.

On a les mêmes définitions et les mêmes propriétés pour les matrices que pour les endomorphismes.

- **PROPRIETE**

Si A est une matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors A est nilpotente

Dem.

- **PROPRIETE**

u est nilpotent d'indice N si et seulement si $\pi_u = X^N$. On a donc $N \leqslant \dim(E)$

Dem.

- **PROPRIETE**

u est nilpotent si et seulement si u est trigonalisable et $Sp(u) = \{0\}$.
A est nilpotente si et seulement si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Dem.

- **PROPRIETE**

u est nilpotent si et seulement si $\chi_u = X^n$ (où $n = \dim(E)$).

Dem.

4.3.2.4 Sous-espaces caractéristiques et trigonalisation

- **PROPRIETE**

u est trigonalisable si et seulement si $Ann(u)$ contient un polynome scindé

Dem.

- **PROPRIETE**

u est trigonalisable si et seulement si son polynome minimal est un polynome scindé

Dem.

- **DEFINITION**

Soit u un endomorphisme de E tel que χ_u **soit scindé** . On note $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \mu_i)^{m_i}$. Les sous-espaces $F_k = \ker (u - \mu_k Id_E)^{m_k}$ sont appelés les **sous-espaces caractéristiques de u**

- **PROPRIETE**

✔ **Les sous-espaces caractéristiques de u sont stables par u.**
✔ **E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques**
✔ $\forall k \in [\![1, p]\!] , \dim (F_k) = m_k$

Dem.

4.4 Applications de la réduction

4.4.1 Puissances et exponentielle d'une matrice diagonalisable

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est supposée diagonalisable.

4.4.1.1 Utilisation d'une matrice diagonalisante

- A étant supposée diagonalisable, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ / $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

- $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PD^kP^{-1}$ avec $D^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n^k \end{pmatrix}$.

- $\forall k \in \mathbb{N}$, $S_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}A^i = P.\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}D^i\right).P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}a_1^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}a_2^i & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}a_n^i \end{pmatrix} P^{-1}$.

  Par continuité de $M \to PMP^{-1}$ (linéaire en dimension finie), on obtient :

  $$\text{Exp}(A) = \lim_{k\to\infty} S_k = P.\text{Exp}(D).P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{a_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

4.4.1.2 Utilisation d'un polynôme annulateur scindé à racines simples

- A étant diagonalisable, il existe un polynôme $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{q}(X - \alpha_k)$ scindé à racines simples (i.e. les α_k sont distincts) tels que $P(A)$ soit la matrice nulle. Si on connait Π_A, on prendra de préférence $P = \Pi_A$, car son degré est minimum.
-
  - Soit $k \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de X^k par P s'écrit $X^k = Q_k.P + R_k$ avec $\deg(R_k) < q$ et l'on a $A^k = Q_k(A).P(A) + R_k(A) = R_k(A)$ (car $P(A) = 0$). Il nous suffit donc de déterminer R_k.
  - On a : $\forall j \in < 1, q >$, $(\alpha_j)^k = R_k(\alpha_j)$. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange, R_k est donc l'unique polynôme de $\mathbb{K}_{q-1}[X]$ prenant pout valeur $(\alpha_j)^k$ en les points α_j. On peut alors exprimer R_k :

    ▷ Dans la base canonique : $R_k = \mu_{k,0} + \mu_{k,1}X + ..\mu_{k,q-1}X^{q-1}$, le calcul des coefficients $\mu_{k,i}$ nécessitant la résolution du système de Cramer (Van der Monde) : $\forall j \in < 1, q >$, $(\alpha_j)^k = \mu_{k,0} + \mu_{k,1}\alpha_j + ..\mu_{k,q-1}\alpha_j^{q-1}$.

On a alors $A^k = \mu_{k,0}I + \mu_{k,1}A + ..\mu_{k,q-1}A^{q-1}$.

$\triangleright$ Dans la base des polynômes interpolateurs de Lagrange aux points α_i : $(L_1, \ldots, L_q)$ où $\forall i \in <1, q>$, $\deg(L_i) < q$ et $L_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. $R_k = \alpha_1^k L_1 + .. + \alpha_q^k L_q$.
On a dans ce cas $A^k = \alpha_1^k L_1(A) + .. + \alpha_q^k L_q(A)$.

- Avec les notations précédentes, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = \alpha_1^k L_1(A) + \ldots + \alpha_q^k L_q(A)$ donc :
$\forall k \in \mathbb{N}$, $S_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} A^i = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\alpha_1^i\right) L_1(A) + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\alpha_q^i\right) L_q(A)$ d'où on déduit :
$\mathrm{Exp}(A) = \displaystyle\lim_{k\to\infty} S_k = e^{\alpha_1} L_1(A) + \ldots + e^{\alpha_q} L_q(A)$.

4.4.1.3 Puissances et exponentielle d'une matrice seulement trigonalisable

4.4.1.4 Cas particulier où A possède une seule valeur propre

- On suppose que A a une seule valeur propre μ on a donc $\chi_A = (X - \mu)^n$ et, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, Π_A est de la forme $(X - \mu)^d$ avec $d \leqslant n$. La matrice $B = A - \mu I_n$ est alors nilpotente ($B^d = (A - \mu I_n)^d = 0$).

- On a $A = B + \mu I_n$ avec B nilpotente ($B^d = 0$) qui commute avec μI_n on peut donc utiliser la formule du binôme :
$\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu^{k-i} B^i$ somme dont les termes d'indice $i \geqslant d$ (s'il y en a) sont nuls :
$\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant d \Rightarrow A^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} \binom{k}{i} \mu^{k-i} B^i$

- Pour $N > d$, posons $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k$. On a ainsi :

$S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{d-1} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu^{k-i} B^i\right) \quad + \quad \sum_{k=d}^{N} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^{d-1} \binom{k}{i} \mu^{k-i} B^i\right)$ ce qui, en réordonnant selon les puissances de B devient :

$S_N = \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{k=i}^{N} \frac{\binom{k}{i}\mu^{k-i}}{k!}\right) B^i = \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{k=i}^{N} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\right) \frac{1}{i!} B^i.$

Or pour tout $i \in [\![0, d-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=i}^{N} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{m=0}^{N-i} \frac{\mu^m}{m!}$ converge vers e^μ donc $\mathrm{Exp}(A) = \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} e^\mu \frac{1}{i!} B^i$

4.4.1.5 Cas général

- A étant trigonalisable, u, canoniquement associé à A est annulé par un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$, donc E est somme directe de sous espaces stables par u sur lesquels l'endomorphisme induit est la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent : ces sous-espaces stables sont les ssous-espaces caractéristiques .

- A est donc semblable à une matrice diagonale par blocs $A' = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_q \end{pmatrix}$. A^p est alors semblable à $A'^p = \begin{pmatrix} A_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^p & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_q^p \end{pmatrix}$. Chaque A_k étant la somme d'une matrice scalaire et d'une matrice nilpotente, on est ramené pour chaque A_k au premier cas, celui d'une matrice ayant exactement une valeur propre.