

Programme de Colle - Semaine n° 08

Du 18 novembre 2024 au 22 novembre 2024

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.

Pour le premier groupe, appelé "**Groupe A**", les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **A**.

Le second groupe, appelé "**Groupe B**", les questions de cours intégreront toutes les questions de cours sauf celles notées "**A**".

Remarque : La note pour un membre du groupe A ne pourra pas dépasser 14

Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Réduction des endomorphismes

Tout exercice de diagonalisation ou de trigonalisation

Espaces vectoriels normés

Normes et distances

- ⇒ Définition de norme
- ⇒ Normes usuelles dans \mathbb{K}^n , normes usuelles dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$
- ⇒ Transport d'une norme, norme d'un espace produit, norme d'algèbre
- ⇒ Normes équivalentes : Définition, exemples. En dimension finie toutes les normes sont équivalentes
- ⇒ Distance. Distance d'un point à une droite
- ⇒ Boules et sphères, parties bornées, parties convexes

Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

- ⇒ Généralités sur les suites, suites bornées.
- ⇒ Suites convergentes. Lien avec l'équivalence de normes
- ⇒ Suites à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.
- ⇒ Suites dans un espace produit

Eléments de topologie dans un espace vectoriel normé

- ⇒ Voisinages d'un point. Ouvert, intérieur
- ⇒ Topologie induite sur une partie d'un EVN
- ⇒ Fermés, adhérence. Densité. Frontière

Exercices et Questions de cours

1. **Groupe A** Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{R}^n : définition. Pour une d'entre elles, au choix de l'interrogateur, montrer que c'est une norme. Les comparer.
2. **TOUS** Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$: définition. Pour une d'entre elles, au choix de l'interrogateur, montrer que c'est une norme. Les comparer.
3. **TOUS** $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (On admet que det est continue...)
4. **Pas lundi** Si A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E, N) et x un point de E , alors $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.
5. **Pas lundi TOUS** Si A est une partie non vide bornée d'un espace vectoriel normé (E, N) alors \overline{A} est bornée et $\text{Diam}(A) = \text{Diam}(\overline{A})$.
6. **TOUS** Si A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E, N) et x un point de E , alors $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.
7. En dimension finie, les compacts sont les parties fermées bornées.
8. BANQUE CCP 68

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
- (5/2 **uniquement**) sans calcul,
 - en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
 - en utilisant le rang de la matrice,
 - en calculant A^2 .
- (b) On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.
9. **TOUS** BANQUE CCP 37
On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} .
On pose, $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(x)| dx$.
- Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E .
 - Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E , $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.
 - Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞ .
 - Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
10. Pas lundi **TOUS** BANQUE CCINP 01
on note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} .
On pose : $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$
- Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
 - Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
 - Soit $u : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(0)$. Montrer que u est une application continue sur E .
 - On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.
Montrer que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
 - Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.
Soit $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.
 - On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. On note \bar{F} l'adhérence de F .
Prouver que $c \in \bar{F}$.
 F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_1$.
11. BANQUE CCP 34
Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E .
- Rappeler la définition d'un point adhérent à A , en termes de voisinages ou de boules.
 - Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.
 - Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E , alors \bar{A} est un sous-espace vectoriel de E .
 - Pas lundi Démontrer que, si A est convexe alors \bar{A} est convexe.
12. BANQUE CCP 38
On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
 $\forall P \in E$, on pose $N_1(P) = \sum_{i=0}^n |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ où $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ avec $n \geq \deg P$.
- Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
 - Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1 .
 - Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
 - On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k . On note N'_1 la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N'_∞ la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
Les normes N'_1 et N'_∞ sont-elles équivalentes ?
13. **TOUS** BANQUE CCP 44

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E .

- (a) i. Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
ii. Montrer que $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.
- (b) Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
- (c) i. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
ii. Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Prochain programme : Espaces vectoriels normés

Groupe A : Ahchouch (8), Astier (4), Auffret (14), Boccovi (14), Bonneville (8), Bouchard (2), Collet (2), Crasez (6), Decanter (6), Gourvil (12), Kha Fontanel (10), Lacroix (10), Lopes (4), Prejean (8),

Groupe B : Les autres (ceux qui auront toutes les questions de cours)