Programme de Colle - Semaine n° 09
Du 25 novembre 2024 au 29 novembre 2024

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **A** .
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"A"**.
Remarque : La note pour un membre du groupe A ne pourra pas dépasser 14
Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Espaces vectoriels normés

Normes et distances

- ✏ Définition de norme
- ✏ Norme produit, norme d'algèbre
- ✏ Distance. Distance d'un point à une partie
- ✏ Normes usuelles dans $\mathbb{K}^n$ ou $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$
- ✏ Normes équivalentes. Cas dimension finie.
- ✏ Boules, parties bornées, parties convexes

Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

- ✏ Généralités sur les suites, suites bornées.
- ✏ Suites à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.
- ✏ Suites convergentes. Lien avec l'équivalence de normes
- ✏ Suites dans un espace produit

Eléments de topologie dans un espace vectoriel normé

- ✏ Voisinages d'un point. Ouvert, intérieur
- ✏ Topologie induite sur une partie d'un EVN
- ✏ Fermés, adhérence. Densité. Frontière

Partie compacte d'un espace vectoriel normé

- ✏ Valeurs d'adhérence d'une suite.
- ✏ Parties compactes. Définition, propriétés.
- ✏ Théorème de Bolzano Weierstrass dans un EVN de dimension finie
- ✏ Caractérisation en dimension finie

Séries dans un espace vectoriel normé

- ✏ Terme général, somme partielle.
- ✏ Convergence absolue
- ✏ Série convergente, somme, restes partiels
- ✏ Exponentielle d'une matrice

Fonctions : limite, continuité

Fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: rappel

- ✏ Limite finie/infinie en un point a fini/infini
- ✏ Limites des fonctions monotones
- ✏ Théorème des valeurs intermédiaires
- ✏ Limite par encadrement
- ✏ Théorème d'homéomorphisme

Fonctions convexes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

- ✏ Définition. Inégalité de Jensen
- ✏ Caractérisations pour des fonctions dérivables : croissance de f'.
- ✏ Inégalité des trois pentes, Epigraphe, croissance des pentes.
- ✏ Inégalité arithmetico-géométrique

Exercices et Questions de cours

1. **Groupe A** Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$: définition. Pour une d'entre elles, au choix de l'interrogateur, montrer que c'est une norme. Les comparer.
2. **TOUS** Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$: définition. Pour une d'entre elles, au choix de l'interrogateur, montrer que c'est une norme. Les comparer.
3. **TOUS** $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. (On admet que det est continue...)
4. Si A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E,N) et x un point de E, alors $d(x,A)=d(x,\overline{A})$.
5. **TOUS** Si A est une partie non vide bornée d'un espace vectoriel normé (E,N) alors $\overline{A}$ est bornée et $\mathrm{Diam}(A)=\mathrm{Diam}(\overline{A})$.
6. Si A est une partie non vide d'un espace vectoriel normé (E,N) et x un point de E, alors $d(x,A)=0 \iff x\in\overline{A}$.
7. **TOUS** BANQUE CCP 37
   On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose, $\forall\, f\in E$, $N_\infty(f)=\sup\limits_{x\in[0;1]}|f(x)|$ et $N_1(f)=\displaystyle\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$.
   (a) i. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   ii. Démontrer qu'il existe $k>0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f)\leqslant kN_\infty(f)$.
   iii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
   (b) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
8. **TOUS** BANQUE CCINP 01
   on note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall f\in E,\ \left\|f\right\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$ et $\left\|f\right\|_1=\displaystyle\int_0^1|f(t)\mid \mathrm{d}t$
   (a) Les normes $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
   (b) Dans cette question, on munit E de la norme $\|\ \|_\infty$.
   i. Soit $u:E\to\mathbb{R}, f\longmapsto f(0)$. Montrer que u est une application continue sur E.
   ii. On pose $F=\left\{f\in E\middle| f(0)=0\right\}$.
   Montrer que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\ \|_\infty$.
   (c) Dans cette question, on munit E de la norme $\|\ \|_1$.
   Soit $c:[0,1]\to\mathbb{R}, x\longmapsto 1$.
   On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*, f_n(x)=\begin{cases} nx & \text{si}\quad 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{n}\\ 1 & \text{si}\quad \frac{1}{n}<x\leqslant 1\end{cases}$
   i. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n-c\|_1$.
   ii. On pose $F=\left\{f\in E\middle| f(0)=0\right\}$. On note $\overline{F}$ l'adhérence de F.
   Prouver que $c\in\overline{F}$.
   F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\ \|_1$.
9. BANQUE CCP 34
   Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.
   (a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
   (b) Démontrer que : $x\in\bar{A}\iff\exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n\in\mathbb{N}, x_n\in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$.
   (c) Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (d) Démontrer que, si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.
10. BANQUE CCP 38
    On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
    $\forall\, P\in E$, on pose $N_1(P)=\displaystyle\sum_{i=0}^n|a_i|$ et $N_\infty(P)=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|$ où $P=\displaystyle\sum_{i=0}^n a_iX^i$ avec $n\geqslant\deg P$.
    (a) i. Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
    ii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
    iii. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
    (b) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynÃ´mes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
    Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

11. **TOUS** BANQUE CCP 44

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

(a) i. Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   ii. Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

(c) i. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   ii. Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

12. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrer que :

(a) f est impaire
(b) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(na) = nf(a)$
(c) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, f(ka) = kf(a)$
(d) $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$

En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1)$

13. BANQUE CCINP 13

(a) Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
(b) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
(c) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
(d) On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\| \|_1$ définie pour tout polynome $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots, +a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
   i. Justifier que $S(0, 1) = \big\{P \in \mathbb{R}[X] \big| \|P\|_1 = 1\big\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   ii. Calculer $\|X^m - X^n\|_1$ pour m et n deux entiers naturels distincts.
   $S(0, 1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

Prochain programme : Propriétés topologiques des applications continues, continuité des applications (multi)linéaires, Suites de fonctions

Groupe A : Ahchouch (8), Astier (4), Auffret (14), Boccovi (14), Bonnevialle (8), Bouchard (2), Collet (2), Crasez (6), Decanter (6), Gourvil (12), Kha Fontanel (10), Lacroix (10), Lopes (4), Prejean (8),
Groupe B : Les autres (ceux qui auront toutes les questions de cours)