Programme de Colle - Semaine n^{o} 10

Du 02 décembre 2024 au 06 décembre 2024

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **A** .
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"A"**.
Remarque : La note pour un membre du groupe A ne pourra pas dépasser 14
Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Espaces vectoriels normés

Révisions

- Normes et distances
- Suites convergentes
- Topologie : ouvert, fermé, intérieur, adhérence, frontière, compact
- Compact : caractérisation en dimension finie
- Distance. Distance d'un point à une partie
- Séries dans un espace vectoriel normé : convergence, convergence absolue

Fonctions : limite, continuité

Fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: rappel

- Limite finie/infinie en un point a fini/infini
- Limites des fonctions monotones
- Limite par encadrement
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Théorème d'homéomorphisme

Fonctions convexes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

- Définition. Inégalité de Jensen
- Caractérisations : Inégalité des trois pentes, Epigraphe, croissance des pentes.
- Caractérisations pour des fonctions de classe suffisante : croissance de f', positivité de f''.
- Inégalité arithmetico-géométrique

Etude locale au voisinage d'un point adhérent

- Limite en un point adhérent à A
- Propriétés, opérations sur les limites.
- Restrictions.
- Limites infinies ou en l'infini
- Continuité en un point

Propriétés globales des fonctions

- Fonctions bornées.
- Fonctions continues.
- Fonctions uniformément continues.
- Fonctions lipschitziennes.
- Liens entre les ensembles constitués de ces différentes fonctions

Propriétés topologiques des fonctions continues

- Images réciproques des ouverts et fermés par une fonction continue. .
- Image d'un compact par une fonction continue.
- Continuité et densité : si deux applications continues coïncident sur une partie dense, elles sont égales
- Parties connexes par arcs.
- Image d'une partie connexe par arcs par une fonction continue.

Exemples d'applications continues

- ✏ Continuité des applications polynomiales (à une ou plusieurs variables).
- ✏ Caractérisation de la continuité d'une application linéaire (f continue ssi $\exists C > 0 \big| \forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant C\|x\|$). Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue. Notations $|||u|||$, $\|u\|_{\text{op}}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur.
- ✏ Caractérisation de la continuité d'une application multilinéaire (f continue ssi $\exists C > 0 \big| \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n, \|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leqslant C\|x_1\| \, \|x_2\| \, \dots \|x_n\|$).

Exercices et Questions de cours

1. **<u>TOUS</u>** $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Théorème de Heine
3. Si A partie non vide de E, l'application $x \to d(x, A)$ est continue
4. **<u>TOUS</u>** Si f est une fonction continue d'un compact K de E vers $\mathbb{R}$ alors f est majorée et qu'elle atteint son maximum
5. Norme d'opérateur : définition, caractérisations et le fait qu'il s'agisse une norme. Norme d'opérateur d'une composée. (Rem : on pourra abréger la démonstration des différentes caractérisations...)
6. **<u>TOUS</u>** Si A est une partie non vide d'un EVN (E, N) et x un point de E, alors $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.
7. Montrer que pour tout $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$.
8. En dimension finie, les compacts sont les parties fermées bornées.
9. En dimension finie, la convergence absolue d'une série entraine sa convergence.
10. **<u>TOUS</u>** Montrer que si f est une fonction continue de E vers $\mathbb{R}$ et si $a \in \mathbb{R}$, les parties $\{x \in E \big| f(x) \geqslant a\}$, $\{x \in E \big| f(x) \leqslant a\}$ et $\{x \in E \big| f(x) = a\}$ sont des fermés et que $\{x \in E \big| f(x) > a\}$, $\{x \in E \big| f(x) < a\}$ et $\{x \in E \big| f(x) \neq a\}$ sont des ouverts.
11. **<u>TOUS</u>** BANQUE CCP 35
    E et F désignent deux espaces vectoriels normés.
    (a) Soient f une application de E dans F et a un point de E.
    On considère les propositions suivantes :
    P1. f est continue en a.
    P2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.
    Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
    (b) Soit A une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé E, et soient f et g deux applications continues de E dans F, F désignant un espace vectoriel normé.
    Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.
12. BANQUE CCP 37
    On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$.
    On pose, $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x \in [0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x$.
    (a) i. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
    ii. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant k N_\infty(f)$.
    iii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
    (b) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
13. **<u>TOUS</u>** BANQUE CCINP 01
    on note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
    On pose : $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t$
    (a) Les normes $\| \, \|_\infty$ et $\| \, \|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
    (b) Dans cette question, on munit E de la norme $\| \, \|_\infty$.
    i. Soit $u : E \to \mathbb{R}, f \longmapsto f(0)$. Montrer que u est une application continue sur E.
    ii. On pose $F = \{f \in E \big| f(0) = 0\}$.
    Montrer que F est une partie fermée de E pour la norme $\| \, \|_\infty$.

(c) Dans cette question, on munit E de la norme $\| \|_1$.
Soit $c : [0,1] \to \mathbb{R}, x \longmapsto 1$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$

i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.

ii. On pose $F = \left\{ f \in E \middle| f(0) = 0 \right\}$. On note $\overline{F}$ l'adhérence de F.
Prouver que $c \in \overline{F}$.
F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\| \|_1$.

14. **<u>TOUS</u>** BANQUE CCP 34
Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.
(a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
(b) Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
(c) Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
(d) Soit B une autre partie non vide de E. Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

15. BANQUE CCP 38
On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
$\forall\, P \in E$, on pose $N_1(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$ où $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.
(a) i. Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
ii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
iii. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
(b) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynÃ´mes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

16. **<u>TOUS</u>** BANQUE CCP 44
Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.
(a) i. Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
ii. Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
(b) Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
(c) i. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
ii. Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

17. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que :
(a) f est impaire
(b) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(na) = nf(a)$
(c) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, f(ka) = kf(a)$
(d) $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$

En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1)$

18. BANQUE CCINP 13
(a) Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
(b) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
(c) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
(d) On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\| \|_1$ définie pour tout polynome $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots, + a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
i. Justifier que $S(0,1) = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \middle| \|P\|_1 = 1 \right\}$ est une partie fermée et bornée de E.
ii. Calculer $\|X^m - X^n\|_1$ pour m et n deux entiers naturels distincts.
$S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

19. BANQUE CCP 41
Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.
Remarques

(a) On utilisera au moins une fois des suites.
(b) On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire
(c) Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

20. **TOUS** BANQUE CCINP 36
Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

(a) Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1. f est continue sur E.
P2. f est continue en 0_E.
P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$.

(b) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Démontrer que φ est linéaire et continue.

Prochain programme : **Suites de fonctions**

Groupe A : Ahchouch (8), Astier (4), Auffret (14), Boccovi (14), Bonnevialle (8), Bouchard (2), Buzeau (10), Collet (2), Crasez (6), Decanter (6), Gourvil (12), Kha Fontanel (10), Lacroix (10), Lopes (4), Prejean (8),
Groupe B : Les autres (ceux qui auront toutes les questions de cours)