Chapitre 7

Suites et séries de fonctions

Contents

E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimensions finies, normés par des normes notées N_E et N_F. Dans la pratique, F sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

7.1 Suites de fonctions

On fixe A une partie de E et on étudie ici les suites à valeurs dans l'espace vectoriel F^A des fonctions définies sur A et à valeurs dans F.
On étudie donc des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : A \subset E \longrightarrow F$.
L'espace vectoriel F^A n'étant pas un espace vectoriel normé (seul son sous espace $\mathcal{B}(A,F)$ l'est avec la norme N_∞), nous ne sommes pas dans le contexte du chapitre "Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé".
Si u est une fonction de $A \subset E$ vers F, $N_F(u)$ est la fonction définie par : $\forall x \in A,\ \ (N_F(u))(x) = N_F(u(x))$

7.1.1 Les divers modes de convergence d'une suite de fonctions

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions, toutes définies sur une même partie A de E et à valeurs dans F.

7.1.1.1 Convergence simple

- **DEFINITION**

  Soit B une partie de A. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **simplement convergente** sur B lorsque pour tout point x de B, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (dans (F, N_F)).

- **DEFINITION**

  Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente sur $B \subset A$, on définit la fonction $f : B \subset E \to F$ par : $\forall x \in B,\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. **$f$ s'appelle limite simple** de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur B.

- En résumé : la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur B signifie :

$$\forall x \in B,\ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists N(x) \in \mathbb{N} \,\big|\, \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N(x) \Rightarrow N_F(f_n(x) - f(x)) \leqslant \varepsilon$$

- **PROPRIETE**

  Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur B alors $(N_F(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $N_F(f)$ sur B.

- **PROPRIETE**

  Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur B, si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g sur B, si a et b sont deux scalaires, $(af_n + bg_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $af + bg$ sur B.

- **PROPRIETE**

  Lorsque (F, N_F) est une algèbre normée, Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur B, si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g sur B, alors $(f_n \times g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f \times g$ sur B.

- **PROPRIETE**

  Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ est une base de F, et si pour tout $k \in [\![1, d]\!]$ on note $g^{[k]}$ la k^o composante d'une fonction g dans cette base : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur B si et seulement si : $\forall k \in [\![1, d]\!]\,,\ \ \left(f_n^{[k]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f^{[k]}$ sur B.

7.1.1.2 Convergence uniforme

Soit D une partie de A et $f : D \to F$ une fonction définie sur D.

- **DEFINITION**

  La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f sur D lorsque :

  $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N} \,\big|\, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \forall x \in D,\ N_F(f_n(x) - f(x)) \leqslant \varepsilon$$

- **Autres formulations équivalentes :**

  * La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D si et seulement si :

  $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N} \,\big|\, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \sup_{x\in D} N_F(f_n(x) - f(x)) \leqslant \varepsilon$$

  * La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D si et seulement si la suite de réels $\left(\sup_{x\in D} N_F(f_n(x) - f(x))\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie au moins au delà d'un certain rang et converge vers 0.

  * **PROPRIETE Critère de convergence uniforme**

    la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D si et seulement si il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui converge vers 0, et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que :
    $\forall n \geqslant n_0\ , \forall x \in D,\ N_F(f_n(x) - f(x)) \leqslant \alpha_n$

- **PROPRIETE**

  Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D, alors : $\forall x \in D, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, c'est à dire : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur D.

  La seule fonction f qui puisse être limite uniforme sur D est celle qui est déjà limite simple sur D, on commencera donc par étudier la convergence simple.

- **PROPRIETE**

  Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D, alors : $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}, (f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

- **PROPRIETE**

  S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de D telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur D.

- **PROPRIETE**

  Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D, alors $(N_F(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $N_F(f)$ sur D

7.1.1.3 Liens avec la norme de la convergence uniforme

Cas général : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de A vers F et $D \subset A$.

- **PROPRIETE**

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D si et seulement si : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que la suite $(f - f_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite convergente vers 0 dans l'espace $\left(\mathcal{B}(D,F), N_\infty^D\right)$.

- **PROPRIETE**

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D, si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur D, si a et b sont des scalaires, $(af_n + bg_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $af + bg$ sur D.

- **PROPRIETE**

On n'a en général aucun résultat sur le produit de deux suites de fonctions uniformément convergentes.

Cas particulier : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions sur A et **chaque fonction f_n est bornée sur $D \subset A$**

- **PROPRIETE**

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D, alors f est bornée sur D et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans l'espace vectoriel normé $\left(\mathcal{B}(D,F), N_\infty^D\right)$.

- **PROPRIETE**

Si $f \in \mathcal{B}(D,F)$ et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans l'espace vectoriel normé $\left(\mathcal{B}(D,F), N_\infty^D\right)$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D.

- **PROPRIETE**

Dans ce contexte, le produit de deux suites uniformément convergentes sur D est une suite qui converge uniformément sur D vers le produit des limites.

7.1.2 Plan d'étude d'une suite de fonctions

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions, toutes définies sur une même partie A d'un espace vectoriel normé (E, N_E) de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé (F, N_F) de dimension finie.

- Déterminer l'ensemble B inclus dans A et $f : B \to F$ tels que :
  - $x \in B \Rightarrow$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F converge vers $f(x)$ dans (F, N_F).
  - $x \notin B \Rightarrow$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
  - On a ainsi l'ensemble B maximal sur lequel il y a convergence simple et la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur B.
- Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur B :
  - Pour montrer que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur B : calculer ou majorer $M_n = \sup\left\{N_F\left(f_n(x) - f(x)\right),\ x \in B\right\}$ et montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Lorsque $E = F = \mathbb{R}$, l'évaluation de M_n se fera le plus souvent par l'étude des variations de $f_n - f$ puis de $|f_n - f|$ sur B.
  - Pour montrer que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur B n'est pas uniforme :
    - ◇ Calculer ou minorer $M_n = \sup\left\{N_F\left(f_n(x) - f(x)\right),\ x \in B\right\}$ et montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Lorsque $E = F = \mathbb{R}$, l'évaluation de M_n se fera le plus souvent par l'étude des variations de $f_n - f$ puis de $|f_n - f|$ sur B.
    - ◇ Exhiber $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $\left(f_n(x_n) - f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0_F.

- Si la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f n'est pas uniforme sur B :
  * Déterminer un sous ensemble de B, le plus grand possible sur lequel la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme.
  * Plus précisément, on cherchera les points de B pour lesquels il existe un voisinage sur lequel la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme.

7.1.3 Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

7.1.3.1 Prolongements immédiats résultant de la convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant simplement vers une fonction f sur une partie B de l'espace de départ E

- **PROPRIETE**

  Si les fonctions f_n sont paires (respectivement impaires, respectivement T-périodiques), alors f est paire (respectivement impaire, respectivement T-périodique).

- **PROPRIETE**

  Si $F = \mathbb{R}$, si les fonctions f_n sont positives, alors f est positive.

- **PROPRIETE**

  Si $E = F = \mathbb{R}$, si les fonctions f_n sont croissantes (respectivement convexes), alors f est croissante (respectivement convexe).

7.1.3.2 Propriétés de limites et continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant simplement vers une fonction f sur une partie B de l'espace de départ E

- **PROPRIETE Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues**

  Soit $a \in B$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur B et continues en a. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur B vers f. Alors f est continue en a

  Dem.

- **PROPRIETE Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues**

  Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur B et continues sur B. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur B vers f. Alors f est continue sur B

  Remarque : Dans le cas où B est une partie de $\mathbb{R}$, ce résultat reste vrai si la convergence n'est uniforme que sur tout segment de B ou sur une famille croissante d'intervalles d'union B

- **PROPRIETE Théorème de la double limite**

Si a est un point adhérent à B, si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur B, et si chaque fonction f_n a une limite finie L_n au point a. Alors :

* **La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans (F, N_F), soit L sa limite.**
* **La fonction f a une limite finie au point a et celle-ci est L.**

On a ainsi, sous réserve de vérifier les hypothèses le théorème dit "de la double limite" :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

Dem.

- Ce résultat demeure valable lorsque $E = \mathbb{R}$, avec $a = +\infty$ (ou $a = -\infty$) lorsque la partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle la convergence est uniforme est non majorée (respectivement non minorée).
- Ce résultat demeure valable lorsque la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme seulement sur $V \cap B$ où V est un voisinage de a.
- si K est une partie compacte de E, $\mathscr{C}^0(K, F)$ est une partie fermée de $\big(\mathcal{B}(K, F), N_\infty^K\big)$.

7.2 Approximations uniformes

7.2.1 Fonctions associées à des subdivisions

I est un intervalle de $\mathbb{R}$. $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$) et F est un espace vectoriel de dimension finie, normé par une norme N_F.

7.2.1.1 Subdivisions de $[a, b]$

- **DEFINITION**

  Une **subdivision** de $[a, b]$ est une suite finie $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ strictement croissante de points de $[a, b]$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$.

- **DEFINITION**

  Une subdivision $(y_j)_{j\in[\![0,p]\!]}$ de $[a, b]$ est dite **plus fine que** $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ lorsque $\{y_j,\ j \in [\![0, p]\!]\}$ contient $\{x_i,\ i \in [\![0, n]\!]\}$.

- Etant données deux subdivisions $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et $(y_j)_{j\in[\![0,p]\!]}$ de $[a, b]$, il existe une subdivision $(z_k)_{k\in[\![0,q]\!]}$ de $[a, b]$ à la fois plus fine que ces deux subdivisions. (Il suffit, pour en obtenir une, d'indexer par une numérotation strictement croissante l'ensemble $\{x_i,\ i \in [\![0, n]\!]\} \cup \{y_j,\ j \in [\![0, p]\!]\}$.

7.2.1.2 Fonctions en escalier

- **DEFINITION**

  $f : [a, b] \to F$ est **en escalier** s'il existe une subdivision $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout i dans $[\![0, n - 1]\!]$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ est une fonction constante. f est alors dite associée à la subdivision $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$.

- Si f est en escalier sur $[a, b]$ associée à $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, elle est associée à toute subdivision plus fine.

- **PROPRIETE**

  Si f est en escalier sur $[a, b]$, $N_F(f) : x \to N_F(f(x))$ est en escalier sur $[a, b]$.

- **PROPRIETE**

  $\mathcal{E}([a, b], F)$, ensemble des applications en escalier de $[a, b]$ vers F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], F)$, ev des applications bornées sur $[a, b]$ à valeurs dans F.

- **PROPRIETE**

  Si (F, N_F) est une $\mathbb{K}$algèbre normée, $\mathcal{E}([a, b], F)$ est alors une sous algèbre de $\mathcal{B}([a, b], F)$.

- **PROPRIETE**

  f est en escalier si et seulement si ses fonctions composantes dans une base de F le sont.

7.2.1.3 Fonctions continues par morceaux

- **DEFINITION**

  $f : [a, b] \to F$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout i dans $[\![0, n-1]\!]$, la restriction f_i de f à l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ est continue et a une limite finie en x_i (à droite) et une limite finie en x_{i+1} (à gauche) (i.e. f_i est prolongeable par continuité au segment $[x_i, x_{i+1}]$).

- **PROPRIETE**

  $\mathscr{C}^0_M([a, b], F)$, ensemble des applications continues par morceaux sur $[a, b]$ et à valeurs dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], F)$ contenant $\mathcal{E}([a, b], F)$. C'est une sous-algèbre lorsque (F, N_F) est une algèbre normée.

- Pour que f soit continue par morceaux, il faut et suffit que ses fonctions composantes dans une base de F le soient.

7.2.2 Approximation uniforme par des fonctions définies par morceaux

Dans la suite, $\| \|_\infty$ désigna la norme de la convergence uniforme sur $[a, b]$ (notée jusqu'ici $N_\infty^{[a,b]}$).

7.2.2.1 Approximation d'une fonction continue sur un segment.

- **THEOREME Théorème 1**

  Si $f : [a, b] \to F$ est continue :

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathcal{E}([a, b], F) \mid \|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

  Dem.

- **THEOREME Théorème 1^{bis}**

  Si $f : [a, b] \to F$ est continue, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

- **PROPRIETE**

  Dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}([a, b], F), \| \|_\infty)$, $\mathscr{C}^0([a, b], F) \subset \overline{\mathcal{E}([a, b], F)}$.

7.2.2.2 Approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

- **THEOREME Théorème 2**

  Si $f : [a, b] \to F$ est continue par morceaux :

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \psi \in \mathcal{E}([a, b], F) \mid \|f - \psi\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

- **THEOREME Théorème 2^{bis}**

  Si $f : [a, b] \to F$ est continue par morceaux, il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

- **PROPRIETE**

Dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}([a,b],F), \| \ \|_\infty)$, $\mathcal{E}([a,b],F)$ **est dense dans** $\mathscr{C}^0_M([a,b],F)$

$$\mathcal{E}([a,b],F) \subset \mathscr{C}^0_M([a,b],F) \subset \overline{\mathcal{E}([a,b],F)}$$

7.2.3 Approximation uniforme par des polynômes

- **THEOREME Théorème de Weierstrass**

Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ **est continue, il existe une suite** $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **de fonctions polynômiales sur** $[a,b]$ **qui converge uniformément vers** f **sur** $[a,b]$**.**

Dem.

- Cette assertion est équivalente à : **PROPRIETE**

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{R}[X] \mid \|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$

- **PROPRIETE**

Dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}([a,b],F), \| \ \|_\infty)$**, l'ensemble des fonctions polynômes sur** $[a,b]$ **est dense dans** $\mathscr{C}^0([a,b],F)$

7.3 Séries de fonctions

Comme pour les suites de fonctions, on considère des fonctions f_n, toutes définies sur une même partie A d'un espace vectoriel normé E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.
Comme pour les séries de vecteurs, on étudiera la série $\sum f_n$ en étudiant la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout entier n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

7.3.1 Convergence simple, convergence uniforme

7.3.1.1 Convergence simple

- **DEFINITION**

  La série de fonctions $\sum f_n$ est **simplement convergente** sur une partie B de A lorsque la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente sur B soit encore lorsque $\forall x \in B$, $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce qui signifie que pour tout x de B, la série $\sum f_n(x)$ est convergente (dans (F, N_F)).

- **DEFINITION**

  Si $\sum f_n$ converge simplement sur B, on appelle **somme** de cette série de fonctions, la fonction notée $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ qui à tout vecteur x de B associe le vecteur $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

- Pour que la série $\sum f_n$ soit simplement convergente sur B, il est nécessaire mais pas suffisant que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur B.

- **DEFINITION**

  Si la série $\sum f_n$ est simplement convergente sur B, on définit pour tout x de B et tout entier n : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$. On définit ainsi une suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite des **restes partiel s** de la série $\sum f_n$, et cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle sur B.

- **PROPRIETE**

  Si $\sum f_n$ converge simplement sur B, si $\sum g_n$ converge simplement sur B, si a et b sont deux scalaires, alors :
  $\sum (af_n + bg_n)$ converge simplement sur B et $\sum_{n=0}^{\infty} (af_n + bg_n) = a\sum_{n=0}^{\infty} f_n + b\sum_{n=0}^{\infty} g_n$.

7.3.1.2 Convergence uniforme

On suppose avoir déjà établi la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur une partie B de A, et donc avoir défini sur B la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes partiels.

- **DEFINITION**

La série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur Δ inclus dans B lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur Δ.

- **PROPRIETE**

La série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur Δ inclus dans B lorsque la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes partiels est uniformément convergente vers la fonction nulle sur Δ.

- Pour que la série $\sum f_n$ soit uniformément convergente sur Δ, il est nécessaire mais pas suffisant que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente sur Δ vers la fonction nulle.

- **PROPRIETE**

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur Δ, si $\sum g_n$ converge uniformément sur Δ, si a et b sont deux scalaires, $\sum (af_n + bg_n)$ converge uniformément sur Δ.

7.3.2 Convergence normale d'une série de fonctions bornées

7.3.2.1 Définition

- **DEFINITION**

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions, toutes bornées sur une partie D de leur ensemble de définition commun A, $\sum f_n$ est **normalement convergente** sur D lorsque la série $\sum \sup\limits_{x\in D} (N_F(f_n(x)))$ est convergente.

- On a donc convergence normale de $\sum f_n$ sur D lorsque la série de terme général f_n est une série de vecteurs de l'espace $\left(\mathcal{B}(D,F), N_\infty^D\right)$, qui est absolument convergente dans cet espace vectoriel normé.

7.3.2.2 Propriétés

- **PROPRIETE**

Si $\sum f_n$ converge normalement sur D, alors, pour tout x de D la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente dans (F, N_F) (i.e. $\sum N_F(f_n(x))$ converge). F étant de dimension finie, $\sum f_n$ converge donc simplement sur D, ce qui permet de définir les fonctions $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k$ (restes partiels de la série de fonctions) et la fonction $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ (somme de la série de fonctions).

- **PROPRIETE**

Si $\sum f_n$ converge normalement sur D, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur D.

Dem.

- **PROPRIETE**

Si $\sum f_n$ converge normalement sur D, alors la fonction $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est bornée sur D et $N_\infty^D\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} N_\infty^D(f_n)$.

Dem.

7.3.2.3 Critère de convergence normale

- **PROPRIETE**

Pour que la série $\sum f_n$ soit normalement convergente sur D, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et un rang n_0 tels que :
$\forall n \geqslant n_0,\ \ \forall x \in D,\ \ N_F(f_n(x)) \leqslant \alpha_n$ et $\sum \alpha_n$ converge.

7.3.3 Plan d'étude d'une série de fonctions

Pour tout entier n, f_n est définie sur $A \subset E$, à valeurs dans F.

7.3.3.1 Convergence simple

- Déterminer $B = \left\{x \in A \mid \sum f_n(x) \text{ converge}\right\}$. B est le domaine de convergence simple, c'est l'ensemble de définition de la fonction somme et aussi des restes partiels de la série.

- Si possible, repérer l'ensemble $C = \left\{x \in B \mid \sum f_n(x) \text{ converge absolument}\right\}$ qui sera l'ensemble maximum sur lequel la convergence pourra être normale.

7.3.3.2 Convergence normale (lorsque les fonctions f_n sont bornées)

- Evaluer la norme uniforme de f_n sur C, sur des sous-ensembles de C afin de déterminer $D \subset C$, le plus vaste possible, tel que $\sum \sup_{x \in D} N_F(f_n(x))$ soit convergente.

- La convergence de $\sum \sup_{x \in D} N_F(f_n(x))$ sera mise en évidence

  * Soit par calcul de ce sup (résultant d'une étude de variations lorsque $E = F = \mathbb{R}$).
  * Soit en exhibant une série convergente $\sum \alpha_n$, telle que : $\forall x \in D,\ N_F(f_n(x)) \leqslant \alpha_n$ (au moins au delà d'un certain rang).

7.3.3.3 Convergence uniforme

- Etudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\Delta \subset B$ i.e. la convergence uniforme vers la fonction nulle sur Δ de la suite (R_n) des restes partiels.

  * Rappel : pour que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur Δ , il est nécessaire mais non suffisant que la suite de réels $\sup_{x \in \Delta} N_F(f_n(x))$ converge vers 0.

  * Si pour tout x de Δ, $\sum f_n(x)$ est une bonne série alternée de réels, on a la majoration : $\forall x \in \Delta,\ \mid R_n(x) \mid \leqslant \mid f_{n+1}(x) \mid \leqslant \sup_{x \in \Delta} N_F(f_n(x))$.

    Dans ce cas la convergence vers 0 de la suite $(\sup_{x \in \Delta} N_F(f_n(x)))$ est suffisante pour que $\sum f_n$ converge uniformément sur Δ.

7.3.4 Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Pour tout entier n, f_n est définie sur $A \subset E$, à valeurs dans F. On suppose que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $B \subset A$ et on note S sa somme.

7.3.4.1 Continuité en un point

- PROPRIETE

  Si en un point a de B chaque fonction f_n est continue et si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur B, alors S est continue au point a.

- Ce résultat demeure valable lorsque la convergence de $\sum f_n$ est uniforme seulement sur $V \cap B$ où V est un voisinage de a.

7.3.4.2 Continuité

- **PROPRIETE**

Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur B, si chaque fonction f_n est continue sur B, alors S est continue sur B.

- Si chaque fonction f_n est continue sur $C \subset B$, si la série $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de tout point de C, alors S est continue sur C.
- Si $E = \mathbb{R}$ et si C est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si chaque fonction f_n est continue sur $C \subset B$, si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans C, alors S est continue sur C.

7.3.4.3 Limite en un point

- **PROPRIETE**

Si a est un point adhérent à B, si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur B, et si chaque fonction f_n a une limite finie L_n au point a. Alors :

  * **La série $\sum L_n$ est convergente dans (F, N_F), soit L sa somme.**
  * **La fonction S a une limite finie au point a et celle-ci est L.**

On a ainsi, sous réserve de vérifier les hypothèses le théorème dit "d'interversion d'une limite et d'une série" :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

- Ce résultat demeure valable lorsque $E = \mathbb{R}$, avec $a = +\infty$ (ou $a = -\infty$) lorsque la partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle la convergence est uniforme est non majorée (respectivement non minorée).
- Ce résultat demeure valable lorsque la convergence de $\sum f_n$ est uniforme seulement sur $V \cap B$ où V est un voisinage de a.

7.3.4.4 Exemples

On suppose ici que (E, N_E) est une algèbre normée de dimension finie et on note 1_E son neutre multiplicatif.

- **PROPRIETE**

La fonction $u \to (1_E - u)^{-1}$ est continue sur $\mathring{B}(0,1)$

- **PROPRIETE**

La fonction exponentielle est continue sur E.

7.4 Annexe : Démonstrations non exigibles

7.4.1 Théorème d'interversion des limites ou th de la double limite

. THEOREME

Pour tout entier n, f_n est une fonction définie sur une partie D d'un espace vectoriel normé (E, N_E) et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie (F, N_F). (F, N_F) est donc un espace de Banach (i.e. espace dans lequel une suite de Cauchy converge).
Si la suite (f_n) converge uniformément sur D vers une fonction f, si en un point a adhérent à D chaque fonction f_n a une limite finie L_n.
Alors : La suite (L_n) est convergente, notons L sa limite.
La fonction f a une limite au point a et celle-ci vaut L

1- Montrons la convergence de la suite (L_n) en prouvant que c'est une suite de Cauchy dans (F, N_F).

Fixons $\varepsilon > 0$, puisque (f_n) converge uniformément vers f sur D :
$\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant N \Rightarrow \forall x \in D,\ N_F(f_k(x) - f(x)) \leqslant \varepsilon$
Soient alors n et p deux entiers avec $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$. On a donc :
$\forall x \in D,\ N_F(f_p(x) - f_n(x)) \leqslant N_F(f_p(x) - f(x)) + N_F(f_n(x) - f(x)) \leqslant 2\varepsilon$
De plus $f_p(x)$ a une limite finie L_p lorsque x tend vers a et $f_n(x)$ a une limite finie L_n lorsque x tend vers a, donc $N_F(f_p(x) - f_n(x))$ a pour limite $N_F(L_p - L_n)$ lorsque x tend vers a. L'inégalité $N_F(f_p(x) - f_n(x)) \leqslant 2\varepsilon$, valable pour tout x de D, peut donc être prolongée à la limite lorsque x tend vers a et on obtient : $N_F(L_p - L_n) \leqslant 2\varepsilon$.

finalement on a prouvé :
$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n \geqslant N \ \text{ et } \ p \geqslant N \Rightarrow N_F(L_p - L_n) \leqslant 2\varepsilon$
(L_n) est donc de Cauchy dans (F, N_F), et donc, puisque (F, N_F)est complet, (L_n) converge vers une limite $L \in F$.

2- Montrons maintenant que f admet L pour limite au point a.
Pour tout $x \in D$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$N_F(f(x) - L) = N_F(f(x) - f_n(x) + f_n(x) - L_n + L_n - L)$
donc $N_F(f(x) - L) \leqslant N_F(f(x) - f_n(x)) + N_F(f_n(x) - L_n) + N_F(L_n - L)$
donc : $N_F(f(x) - L) \leqslant N_\infty(f - f_n) + N_F(f_n(x) - L_n) + N_F(L_n - L)$
étant donné $\varepsilon > 0$, on peut choisir un entier n pour lequel on aura à la fois $N_\infty(f - f_n) \leqslant \varepsilon$ (puisque (f_n) converge uniformément vers f sur D) et $N_F(L_n - L) \leqslant \varepsilon$ (puisque (L_n) converge vers L dans (F, N_F)). Cet entier n étant fixé, on a donc :
$\forall x \in D,\ \ N_F(f(x) - L) \leqslant N_F(f_n(x) - L_n) + 2\varepsilon$.
La fonction f_n ayant pour limite L_n au point a : $\exists \alpha > 0 \ / \ x \in D \ \text{ et } \ N_E(x - a) \leqslant \alpha \Rightarrow N_F(f_n(x) - L_n) \leqslant \varepsilon$
Finalement on a :
$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \alpha > 0 \ / \ x \in D \ \text{ et } \ N_E(x - a) \leqslant \alpha \Rightarrow N_F(f(x) - L) \leqslant 3\varepsilon$ et donc f admet pour limite L au point a.

7.4.2 Théorème d'approximation des fonctions

- **THEOREME Théorème 1 : Approximation de f par des fonctions en escalier**

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathcal{E}([a,b], F) \ / \ \|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Démonstration :

* On appelle subdivision pointée de $[a,b]$ tout couple (s,y) où s est une subdivision $(x_i)_{i \in <0,n>}$ de $[a,b]$ et où y est une suite finie $(y_i)_{i \in <0,n-1>}$ telle que : $\forall i \in <0, n-1>,\ y_i \in [x_i, x_{i+1}]$.
* Le pas de $s = (x_i)_{i \in <0,n>}$ de $[a,b]$ est $p(s) = \text{Max}\{x_{i+1} - x_i,\ i \in <0, n-1>\}$.
* à $f \in \mathscr{C}^0([a,b], F)$ et à (s,y) subdivision pointée de $[a,b]$, on associe la fonction $\varphi_{sy} \in \mathcal{E}_s([a,b], F)$ définie par :

$$\begin{cases} \forall i \in <0, n>,\ \varphi_{sy}(x_i) = f(x_i) \\ \forall i \in <0, n-1>,\ \forall t \in]x_i, x_{i+1}[,\ \varphi_{sy}(t) = f(y_i) \end{cases}$$

* Montrons que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ p(s) \leqslant \eta \Rightarrow \|f - \varphi_{sy}\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
  Soit $\varepsilon > 0$. f étant continue sur le compact $[a,b]$, elle est uniformément continue, donc :
  $\exists \eta > 0 \ / \ \forall (u,v) \in [a,b]^2, |\ u - v \ | \leqslant \eta \Rightarrow \|f(u) - f(v)\| \leqslant \varepsilon$.
  Soit alors (s,y) une subdivision pointée de $[a,b]$ telle que $p(s) \leqslant \eta$.

Quel que soit $t \in [a,b]$:

$\diamond$ ou bien $t \in \{x_i, i \in <0,n>\}$ et alors $\varphi_{sy}(t) - f(t) = 0$

$\diamond$ ou bien t est dans un intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ et $\varphi_{sy}(t) - f(t) = f(y_i) - f(t)$ et alors, ayant $|\ t - y_i\ | \leqslant x_{i+1} - x_i \leqslant p(s) \leqslant \eta$, on a $\|\varphi_{sy}(t) - f(t)\| \leqslant \varepsilon$

On a donc finalement $\forall t \in [a,b]\ \ \|f(t) - \varphi_{sy}(t)\| \leqslant \varepsilon$ c'est à dire : $\|f - \varphi_{sy}\|_\infty \leqslant \varepsilon$

- **THEOREME Théorème 1^{bis}**

Il existe une suite (φ_n) de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Démonstration : Ce théorème est équivalent au précédent :

* D'après le théorème 1 : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathcal{E}([a,b],F)\ /\ \|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$

  En particulier : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists \varphi_n \in \mathcal{E}([a,b],F)\ /\ \|f - \varphi_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. (φ_n) est alors une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ (d'après le théorème des gendarmes).
* Si f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite (φ_n) de fonctions en escalier sur $[a,b]$:
  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_o \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_o \Rightarrow \|f - \varphi_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Il suffit alors de choisir $\varphi = \varphi_{N_o}$ pour avoir $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$

- **THEOREME Théorème 3**

Si $f : [a,b] \to F$ est continue par morceaux :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \psi \in \mathcal{E}([a,b],F)\ /\ \|f - \psi\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Comme précédemment, cette assertion est équivalente à : il existe une suite (ψ_n) de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Démonstration :

* Soit $f \in \mathscr{C}^0_M([a,b],F)$ et s une subdivision $(x_i)_{i \in <0,n>}$ de $[a,b]$ associée à f. Pour tout i de $<0,n-1>$, la restriction f_i de f à l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction g_i continue sur $[x_i, x_{i+1}]$.
* Soit $\varepsilon > 0$, d'après le théorème 1 : $\forall i \in <0,n-1>,\ \exists \varphi_i \in \mathcal{E}([x_i,x_{i+1}],F)\ /\ \|g_i - \varphi_i\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
* Soit alors $\psi \in \mathcal{E}_s([a,b],F)$ définie par :
  $\forall i \in <0,n>,\ \psi(x_i) = f(x_i)$
  $\forall i \in <0,n-1>,\ \forall t \in]x_i,x_{i+1}[,\ \psi(t) = \varphi_i(t)$
* Soit $t \in [a,b]$:

  $\diamond$ ou bien $t \in \{x_i,\ i \in <0,n>\}$ et alors $\psi(t) - f(t) = 0$

  $\diamond$ ou bien t est dans un intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ et $\|\psi(t) - f(t)\| = \|\varphi_i(t) - g_i(t)\| \leqslant \varepsilon$.

  On a donc bien $\|f - \psi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

7.4.3 Théorème de Weierstrass

THEOREME Théorème de Weierstrass

Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue, il existe une suite (P_n) de fonctions polynômiales sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
Comme précédemment, cette assertion est équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{R}[X]\ /\ \|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Démonstration lorsque $[a,b] = [0,1]$

* On appelle polynômes de Bernstein les polynômes $B_{nk} = \dbinom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $k \in <0,n>$. Ils vérifient les propriétés suivantes :
* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1]$:
  $\forall k \in <0,n>\ B_{nk}(x) \geqslant 0$
  $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{nk}(x) = 1$ (Formule du binôme)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} B_{nk}(x) = x \qquad \text{(car pour } k>0,\ \frac{k}{n}B_{nk}(x) = xB_{n-1k-1}(x))$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} B_{nk}(x) = \frac{n-1}{n}.x^2 + \frac{1}{n}x \qquad \text{(démarche analogue) ;}$$
$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 B_{nk}(x) = nx(1-x) \leqslant \frac{n}{4} \qquad \text{(égalité résultant des précédentes et } x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}).$$

* Pour tout entier n, on définit P_n par : $P_n = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})B_{nk}$. Montrons que (P_n) converge uniformément vers f sur [0,1] :

Quel que soit $\varepsilon > 0$:
▷ f étant continue sur le segment [0,1], elle est uniformément continue donc : $\exists \mu > 0 \ / \ \forall (x,y) \in [0,1]^2,\ \mid x-y \mid \leqslant \mu \Rightarrow \mid f(x) - f(y \mid \leqslant \varepsilon$.
▷ D'autre part, f est bornée : $\exists M \geqslant 0 \ / \ \forall x \in [0,1],\ \mid f(x) \mid \leqslant M$.
▷ Enfin, la suite $\frac{M}{2n\mu^2}$ Converge vers 0 donc : $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ n \geqslant N \Rightarrow \frac{M}{2n\mu^2} \leqslant \varepsilon$.

Soit $x \in [0,1]$, notons $A = \{k \ / \ \mid k - nx \mid > n\mu\}$ et $B = \{k \ / \ \mid k-nx \mid \leqslant n\mu\}$. Les ensembles A et B forment une partition de $<0,n>$

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} (f(\frac{k}{n}) - f(x))B_{nk}(x) \right| \qquad \text{(car } \sum_{k=0}^{n} B_{nk}(x) = 1) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \mid f(\frac{k}{n}) - f(x) \mid B_{nk}(x) \qquad \text{(car } B_{nk}(x) \geqslant 0) \\
&\leqslant \sum_{k\in A} \mid f(\frac{k}{n}) - f(x) \mid B_{nk}(x) + \sum_{k \in B} \mid f(\frac{k}{n}) - f(x) \mid B_{nk}(x)
\end{aligned}$$

◇ Si $k \in B$, $\mid \frac{k}{n} - x \mid \leqslant \mu$ donc $\mid f(\frac{k}{n}) - f(x) \mid \leqslant \varepsilon$ donc $\sum_{k\in B} \mid f(\frac{k}{n}) - f(x) \mid B_{nk}(x) \leqslant \varepsilon \sum_{k \in B} B_{nk}(x) \leqslant \varepsilon$

(car $\sum_{k\in B} B_{nk}(x) \leqslant \sum_{k \in <0,n>} B_{nk}(x) = 1$)

◇ Si $k \in A$, $\frac{1}{n^2\mu^2} \mid k - nx \mid^2 \geqslant 1$ donc $\sum_{k\in A} B_{nk}(x) \leqslant \frac{1}{n^2\mu^2} \sum_{k\in A} \mid k-nx \mid^2 B_n(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-nx)^2}{n^2\mu^2} B_{nk}(x) \leqslant \frac{1}{4n\mu^2}$

Donc $|P_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k\in A} 2MB_{nk}(x) + \varepsilon \leqslant \frac{M}{2n^2} + \varepsilon$.
Et finalement, $\forall \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \forall x \in [0,1],\ |P_n(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$. C'est à dire que (P_n) converge uniformément vers f sur [0,1].

Démonstration dans le cas général

Si g est continue sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$

* f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = g(tb + (1-t)a)$ est continue sur $[0,1]$ donc f est limite uniforme sur $[0,1]$ de la suite (P_n) précédemment définie.
* Posons $Q_n(x) = P_n(\frac{x-a}{b-a})$ (les Q_n sont bien des polynômes).
  On a alors :
* $\forall x \in [a,b],\ g(x) - Q_n(x) = f(\frac{x-a}{b-a}) - P_n(\frac{x-a}{b-a})$ et l'application $\varphi : \begin{pmatrix} [a,b] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \frac{x-a}{b-a} \end{pmatrix}$ étant bijective (de réciproque $t \to tb + (1-t)a$) on a :
  $\mathrm{Sup}\{\mid g(x) - Q_n(x) \mid,\ x \in [a,b]\} = \mathrm{Sup}\{\mid f(t) - P_n(t) \mid,\ t \in [0,1]\}$
  quantité ayant pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$ donc (Q_n) converge uniformément vers g sur $[a,b]$.