Programme de Colle - Semaine n° 11
Du 09 décembre 2024 au 13 décembre 2024

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **A** .
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"A"**.
Remarque : La note pour un membre du groupe A ne pourra pas dépasser 14
Pour compléter la question de cours, on pourra demander l'énoncé précis d'un résultat ou d'une définition, y compris lorsqu'il ne s'agit pas d'une question du groupe correspondant.

Espaces vectoriels normés

Révisions

- Normes et distances
- Suites convergentes
- Topologie : ouvert, fermé, intérieur, adhérence, frontière, compact
- Compact : caractérisation en dimension finie
- Distance. Distance d'un point à une partie
- Séries dans un espace vectoriel normé : convergence, convergence absolue

Fonctions : limite, continuité

révisions

- Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
- Limite en un point adhérent
- Continuité en un point
- Théorème d'homéomorphisme
- Fonctions convexes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Propriétés topologiques des fonctions continues

- Images réciproques des ouverts et fermés par une fonction continue. .
- Image d'un compact par une fonction continue.
- Continuité et densité : si deux applications continues coïncident sur une partie dense, elles sont égales
- Parties connexes par arcs.
- Image d'une partie connexe par arcs par une fonction continue.

Exemples d'applications continues

- Continuité des applications polynomiales (à une ou plusieurs variables).
- Caractérisation de la continuité d'une application linéaire (f continue ssi $\exists C > 0 \big| \forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant C\|x\|$). Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue. Notations $|||u|||$, $\|u\|_{\mathrm{op}}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur.
- Caractérisation de la continuité d'une application multilinéaire (f continue ssi $\exists C > 0 \big| \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n, \|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leqslant C\|x_1\|\,\|x_2\| \dots \|x_n\|$).

Suites de fonctions

Modes de convergence

- Convergence simple, convergence uniforme. Plan d'étude d'une suite de fonctions.
- Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. Plan d'étude d'une série de fonctions.
- Continuité de la limite (resp. somme) uniforme d'une suite (resp. série) de fonctions continues et th double limite (ou th d'interversion des symboles lim et $\sum$).

Approximations uniformes

- ✏ Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux sur un segment.
- ✏ Approximation d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier.
- ✏ Approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.
- ✏ Approximation d'une fonction continue sur un segment par des polynômes (admis).

Séries de fonctions

Modes de convergence

- ✏ Convergence simple, convergence normale, convergence uniforme.
- ✏ Plan d'étude d'une série de fonctions.
- ✏ Théorème d'interversion des signes somme et limite.
- ✏ Continuité de la somme uniforme d'une série de fonctions continues.

Rem : on n'a pas encore les résultats concernant la dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions

Exercices et Questions de cours

1. **<u>TOUS</u>** $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Théorème de Heine
3. Si A partie non vide de E, l'application $x \to d(x, A)$ est continue
4. **<u>TOUS</u>** Si f est une fonction continue d'un compact K de E vers $\mathbb{R}$ alors f est majorée et qu'elle atteint son maximum
5. Norme d'opérateur : définition, caractérisations et le fait qu'il s'agisse une norme. Norme d'opérateur d'une composée. (Rem : on pourra abréger la démonstration des différentes caractérisations...)
6. **<u>TOUS</u>** Si A est une partie non vide d'un EVN (E, N) et x un point de E, alors $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.
7. Montrer que pour tout $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$.
8. En dimension finie, les compacts sont les parties fermées bornées.
9. En dimension finie, la convergence absolue d'une série entraine sa convergence.
10. Approximation uniforme des fonctions continues par les fonctions en escalier.
11. **<u>TOUS</u>** Montrer que si f est une fonction continue de E vers $\mathbb{R}$ et si $a \in \mathbb{R}$, les parties $\{x \in E \big| f(x) \geqslant a\}$, $\{x \in E \big| f(x) \leqslant a\}$ et $\{x \in E \big| f(x) = a\}$ sont des fermés et que $\{x \in E \big| f(x) > a\}$, $\{x \in E \big| f(x) < a\}$ et $\{x \in E \big| f(x) \neq a\}$ sont des ouverts.
12. **<u>TOUS</u>** Lemme de Lebesgue. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t) \sin(nt)\, dt = 0$
13. **<u>TOUS</u>** BANQUE CCP 35
    E et F désignent deux espaces vectoriels normés.
    (a) Soient f une application de E dans F et a un point de E.
    On considère les propositions suivantes :
    P1. f est continue en a.
    P2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
    Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
    (b) Soit A une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé E, et soient f et g deux applications continues de E dans F, F désignant un espace vectoriel normé.
    Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.
14. **<u>TOUS</u>** BANQUE CCP 34
    Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.
    (a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
    (b) Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
    (c) Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
    (d) Soit B une autre partie non vide de E. Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

15. **TOUS** BANQUE CCINP 01
on note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f \in E,\ \left\|f\right\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\left\|f\right\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)\ |\ \mathrm{d}t$
   (a) Les normes $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
   (b) Dans cette question, on munit E de la norme $\|\ \|_\infty$.
      i. Soit $u : E \to \mathbb{R}, f \longmapsto f(0)$. Montrer que u est une application continue sur E.
      ii. On pose $F = \left\{f \in E \middle| f(0) = 0\right\}$.
      Montrer que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\ \|_\infty$.
   (c) Dans cette question, on munit E de la norme $\|\ \|_1$.
   Soit $c : [0,1] \to \mathbb{R}, x \longmapsto 1$.
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$
      i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\left\|f_n - c\right\|_1$.
      ii. On pose $F = \left\{f \in E \middle| f(0) = 0\right\}$. On note $\overline{F}$ l'adhérence de F.
      Prouver que $c \in \overline{F}$.
      F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\ \|_1$.

16. BANQUE CCP 53
On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.
   (a) i. Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
      On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
      ii. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
      $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?
      iii. $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?
   (b) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

17. BANQUE CCP 41
Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.
Remarques
   (a) On utilisera au moins une fois des suites.
   (b) On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire
   (c) Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

18. **TOUS** BANQUE CCINP 36
Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
   P1. f est continue sur E.
   P2. f est continue en 0_E.
   P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \left\|f(x)\right\|_F \leqslant k \left\|x\right\|_E$.
   (b) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
   Démontrer que φ est linéaire et continue.

Prochain programme : **Intégration et dérivation**

Groupe A : Ahchouch (8), Astier (4), Auffret (14), Boccovi (14), Bonnevialle (8), Bouchard (2), Buzeau (10), Collet (2), Crasez (6), Decanter (6), Gourvil (12), Kha Fontanel (10), Lacroix (10), Lopes (4), Prejean (8),
Groupe B : Les autres (ceux qui auront toutes les questions de cours)