Devoir en temps libre n° 06

PROBLEME I : Autour des séries de fonctions

On rappelle que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

PARTIE I : Etude d'une fonction définie par la somme d'une série

On considère la fonction F donnée par : $F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$.

1. Définition de la fonction F

1.a) Montrer que l'ensemble de définition de F est $\mathbb{R}\setminus\left\{-n\middle|n\in\mathbb{N}^*\right\}$

1.b) Calculer $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$

Dans la suite on étudie la fonction F uniquement sur $\mathbb{R}^+$

2. Continuité de F sur $\mathbb{R}^+$.

2.a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$

2.b) Etablir que : $\forall(x,y)\in[0,+\infty[^2, F(y)-F(x)=(y-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

En déduire que sur $\mathbb{R}^+$, F est $\frac{\pi^2}{6}-$lipschitzienne.

3. Dérivabilité de F

3.a) Prouver que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et donner, pour tout $x\geqslant 0$, la valeur de $F'(x)$ sous forme de somme d'une série. Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $F'(1)$.

3.b) Montrer que, sur $\mathbb{R}^+$, F est une fonction croissante et concave.

Retrouver le fait que sur $\mathbb{R}^+$, F est $\frac{\pi^2}{6}-$lipschitzienne.

4. Limite de F au voisinage de $+\infty$

4.a) On suppose que F est majorée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\exists M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}^+,\ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)\leqslant M$$

En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant M$. Conclure.

4.b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

5. Equivalent de F au voisinage de $+\infty$.
Pour $x\in]0,+\infty[$, on pose φ_x la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\forall t\in[1,+\infty[,\ \varphi_x(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{x+t}$$

5.a) Calculer, pour $y>1$, $J_x(y)=\int_1^y\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$ puis $\ell(x)=\lim_{y\to+\infty}J_x(y)$.

5.b) Prouver que $\forall n\geqslant 1$, $\varphi_x(n+1)\leqslant\int_n^{n+1}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\varphi_x(n)$

En déduire que : $\ell(x)\leqslant F(x)\leqslant 1+\ell(x)$

5.c) Conclure que, lorsque x tend vers $+\infty$, $F(x)\sim\ln(x)$

PARTIE II : Etude d'équations fonctionnelles

1. Soit a un réel quelconque. On se propose de prouver qu'il existe une unique fonction f_a, définie sur $]0,+\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :

$$C_1(a) : \begin{cases} \forall x > 0,\ f_a(x+1) - f_a(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_a(1) = a \\ f_a \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

1.a) On suppose que deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ sont solutions de $C_1(a)$ et on pose $\delta = g - h$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \delta(x+1) = \delta(x)$ et préciser la valeur de $\delta(n)$ pour tout entier n non nul.

1.b) Montrer que : $\forall x \in]0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} \leqslant \delta(x+n) \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire que :

$$\forall x > 0,\ g(x) = h(x)$$

1.c) Montrer que l'unique solution de $C_1(a)$ est la fonction f_a définie par :

$$\forall x > 0, f_a(x) = a - \frac{1}{x} + F(x)$$

où F est la fonction étudiée dans la deuxième partie.

2. On se propose de prouver qu'il existe une unique fonction g, dérivable sur $]0,+\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :

$$C_2 : \begin{cases} \forall x > 0,\ g(x+1) - g(x) = \ln(x) \\ g(1) = 0 \\ g' \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

2.a) On suppose que g est solution de C_2

i. Montrer que g' est solution de $C_1(\alpha)$ avec $\alpha = g'(1)$

ii. Calculer $g(2) - g(1)$ de deux manières afin de montrer que $\alpha = -\displaystyle\int_1^2 f_0(t)\mathrm{d}t$ où f_0 est la solution de $C_1(0)$

iii. Montrer que : $\forall x > 0, g(x) = \alpha(x-1) + \displaystyle\int_1^x f_0(t)\mathrm{d}t$

2.b) Montrer que C_2 admet une unique solution.

2.c) Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n>0} \left(x \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \right)$ est convergente.

2.d) Prouver que l'unique solution de C_2 est donnée par :

$$\forall x > 0,\ g(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \right)$$

3. On se propose de prouver qu'il existe une unique fonction h, dérivable sur $]0,+\infty[$, à valeurs strictement positives vérifiant les conditions suivantes :

$$C_3 : \begin{cases} \forall x > 0,\ h(x+1) = xh(x) \\ h(1) = 1 \\ \ln \circ h \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

3.a) Prouver l'existence et l'unicité de h et l'exprimer en fonction de g

3.b) Calculer la valeur de $h(p)$ pour tout entier naturel non nul p.

3.c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $v_n(x) = \dfrac{(n+1)^x\ n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$. Montrer que la suite de fonctions $(v_n)_{n>0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers h.

3.d) Exprimer $v_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en fonction du coefficient binomial $\dbinom{2n}{n}$ et en déduire la valeur de $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Cette fonction h est en fait la fonction Γ appelée fonction gamma d'Euler et dont l'une des propriétés fondamentales est d'extrapoler la suite factorielle.

PROBLEME II : Approximations uniformes de fonctions continues (Facultatif)

E désigne l'espace des fonctions continues sur $I = [0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il est muni de la norme uniforme : $\|f\| = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$.
Le but de ce problème est d'étudier la densité de certains sous-espaces de E, et d'en tirer des conséquences.
Dans la partie **I**, on prouve de manière élémentaire la densité dans E de l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
Dans la partie **II**, on prouve la densité de l'espace des fonctions polynomiales : c'est le théorème de Stone Weierstrass.

PARTIE I :

1. On fixe dans cette question un élément g de E.

1.a) Prouver que l'on peut prolonger g en une fonction continue sur $[0,2]$ (que l'on notera encore g pour des raisons de commodité).

1.b) Soit G un primitive de g sur $[0,2]$. On définit, pour n entier naturel non nul, la fonction G_n de I dans $\mathbb{R}$ par :

$$G_n \; : \; x \to \frac{G\left(x+\frac{1}{n}\right) - G(x)}{\frac{1}{n}}$$

La fonction G_n ainsi définie est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
En utilisant l'uniforme continuité de g et le théorème des accroissements finis, prouver que la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers g dans l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. Conclure.

2. Prouver plus généralement la densité dans E du sous-espace E_k des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, et ce, pour tout $k \geqslant 1$

3. Application : Lemme de Lebesgue

On veut prouver que si f est élément de E, la suite $(I_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\cos(nt)\,dt$ tend vers 0.

3.a) Prouver élémentairement ce résultat dans le cas où f est $\mathscr{C}^1$.

3.b) On suppose seulement f continue. Soit ε un réel strictement positif.
Prouver l'existence d'une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur I vérifiant $\|f-g\| \leqslant \varepsilon$.
Majorer $|I_n(f) - I_n(g)|$.
Conclure soigneusement

PARTIE II : Polynomes de Bernstein

Pour toute fonction f de E, on définit le n$^{\text{ième}}$ polynôme de Bernstein de f, $B_n(f)$ par :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, f\left(\frac{k}{n}\right) \, X^k (1-X)^{n-k}$$

1. Déterminer les polynômes $B_n(f)$ quand f est la fonction $t \to t^k$ pour $k = 0,1,2$.

2. Prouver l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers zéro telle que, si on note φ la fonction carrée $x \to x^2$:

$$\forall x \in I, \; \left|x^2 - B_n(\varphi)(x)\right| \leqslant a_n$$

3. Prouver que pour tout $x \in I$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} \, x^k \, (1-x)^{n-k} = n\,x\,(1-x)$.

4. Soit f une fonction continue sur I, $M = \|f\|$, et ε un réel strictement positif.

4.a) Pouver que

$$\exists \eta > 0 \big| \, \forall x \in I, \forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, k \leqslant n, \left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Prouver, grâce à la relation trouvée à la question 3., que :

$$\forall x \in I, \sum_{k; \left|x-\frac{k}{n}\right| \geqslant \eta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\eta^2}$$

4.b) On pose $\Delta_n(x) = |f(x) - B_n(f)(x)|$. En utilisant la veleur trouvée pour $B_n(1)$, prouver que $\forall x \in I$,
$\Delta_n(x) \leqslant \displaystyle\sum_{k; \left|x-\frac{k}{n}\right| < \eta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \sum_{k; \left|x-\frac{k}{n}\right| \geqslant \eta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$.
En déduire que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, n > \frac{M}{\varepsilon\eta^2} \Longrightarrow \Delta_n(x) \leqslant \varepsilon$$

5. Prouver la densité dans E de l'espace des fonctions polynomiales.

6. Plus généralement, prouver pour toute fonction f continue sur $[a, b]$ et pour tout réel ε strictement positif, l'existence d'un polynôme P tel que :

$$\forall x \in [a, b], \left|f(x) - P(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

7. Une application

Pour f et g dans E, on pose $\langle f | g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\, dt$.
Soit $\mathscr{P}$ le sous-espace de E de E constitué des fonctions polynomiales. On se propose de déterminer son orthogonal $\mathscr{P}^\perp$ au sens du produit scalaire ci-dessus, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f telles que :

$$\forall Q \in \mathscr{P}, \int_0^1 f(t)Q(t)\, dt = 0$$

7.a) Prouver que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

7.b) Soit f un élément de E. Prouver que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\, B_n(f)(t)\, dt = \int_0^1 f^2(t)\, dt$$

7.c) En déduire $\mathscr{P}^\perp$. Prouver cependant que $\mathscr{P} \neq E$. On n'a donc pas $E = \mathscr{P} \oplus \mathscr{P}^\perp$. En quoi cela n'est-il pas contradictoire avec les théorèmes du cours sur les espaces euclidiens ?

8. Critique et tentative de généralisation

8.a) On se donne une fonction f continue sur $\mathbb{R}$, et l'on suppose l'existence d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que :
$d_n = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - P_n(t)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Prouver que pour p et q assez grands, les polynômes P_p et P_q diffèrent par une constante, et en déduire que f est un polynôme. Qu'en pensez-vous ?

8.b) On désigne par φ ma fonction $x \to x^2$.
Calculer $\|\varphi - B_n(\varphi)\|$

8.c) Quel commentaire cela vous inspire-t-il à propos de la qualité de l'approximation d'une fonction continue par ses polynômes de Bernstein ?