Programme de Colle - Semaine n^o 12

Du 16 décembre 2024 au 20 décembre 2024

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **A** .
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"A"**.
Remarque : La note pour un membre du groupe A ne pourra pas dépasser 14
ATTENTION : A partir de cette semaine deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte $\sim$ 5 min) d'ordre pratique ou un énoncé précis d'un résultat du cours + une question de cours usuelle (Démo ou exo Banque CCP) pour chaque élève des deux groupes.

Questions courtes ($\sim$ 7 min, énoncé précis et/ou question pratique) pour tous les élèves

Donner un énoncé précis

1. Énoncé de "changement de variables dans une intégrale" puis calcul de $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ avec $a>0$
2. Énoncé précis et complet, avec majoration du reste, du "critère spécial des séries alternées"
3. Formule de Taylor avec reste intégral
4. Formule de Taylor-Young
5. Inégalité de Taylor Lagrange
6. Dérivabilité et dérivée de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$
7. Dérivabilité et dérivée de la somme d'une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$
8. Définition et caractérisations de la norme d'opérateurs pour une application linéaire continue
9. Tout énoncé relevant d'un point du paragraphe "Exercices et Questions de cours"

Suites et séries de fonctions

Modes de convergence

- ✏ Convergence simple, convergence uniforme. Plan d'étude d'une suite de fonctions.
- ✏ Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. Plan d'étude d'une série de fonctions.
- ✏ Continuité de la limite (resp. somme) uniforme d'une suite (resp. série) de fonctions continues et th double limite (ou th d'interversion des symboles lim et $\displaystyle\int$).

Approximations uniformes

- ✏ Approximation d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier.
- ✏ Approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.
- ✏ Approximation d'une fonction continue sur un segment par des polynômes (admis).

Intégration et dérivation

Intégration sur un segment

- ✏ Intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs dans F EVN de dimension finie
- ✏ Intégration des fonctions continues
- ✏ Sommes de Riemann.
- ✏ Comparaison des normes dans $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{C})$.
- ✏ Passage à la limite sous le signe $\displaystyle\int_{[a,b]}$, interversion des signes $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\displaystyle\int_{[a,b]}$

Dérivation sur un intervalle

- ✏ Dérivabilité en un point. Opérations sur les fonctions dérivables en un point
- ✏ Fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ sur I
- ✏ Propriétés particulières des fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$: Rolle, accroissements finis, monotonie, convexité

Primitives et intégrales

- ✏ Primitives d'une fonction continue ; Théorème fondamental
- ✏ Intégration par parties ; Changement de variables ; Théorèmes de Taylor

Lien avec suites et séries de fonctions

- ✏ Primitive s'annulant en a de la limite (resp somme) d'une suite (resp série) de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment de l'intervalle I
- ✏ Dérivabilité (et dérivée) de la limite (ou somme) d'une suite (série) de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ **Enoncé à connaitre pour tous**

Exercices et Questions de cours

1. **TOUS** $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Convergence des sommes de Riemann
3. Montrer que pour tout $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$.
4. Approximation uniforme des fonctions continues par les fonctions en escalier.
5. **TOUS** Continuité en a de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues en a
6. **TOUS** Lemme de Lebesgue. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\,\sin(nt)\,dt = 0$
7. Domaine de définition, continuité, limite aux bornes de $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$
8. **TOUS** Changement de variables dans une intégrale
9. Rolle et accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles
10. Théorème de Taylor avec reste intégral
11. **TOUS** Dérivation de $B(f,g)$ lorsque B est bilinéaire et f et g sont dérivables.
12. **TOUS Banque CCP : Ex 10** On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.
    (a) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
    (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.
13. **Banque CCP : Ex 18**
    On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.
    (a) Étudier la convergence simple de cette série.
    On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
    (b) i. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
    ii. La fonction S est-elle continue sur D ?
14. **TOUS Banque CCP : Ex 16**
    On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :
    $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$
    On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\ \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}\right]$.
    (a) Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
    (b) Calculer $S'(1)$.
15. BANQUE CCP 53
    On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

(a) i. Prouver que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

ii. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

$\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

iii. $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

(b) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

(c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

16. **<u>TOUS</u>** BANQUE CCINP 36

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

(a) Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

P1. f est continue sur E.

P2. f est continue en 0_E.

P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.

(b) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Démontrer que φ est linéaire et continue.

<u>Prochain programme :</u> **Exponentielle. Séries entières**

<u>Groupe A</u> : Ahchouch (8), Astier (4), Auffret (14), Boccovi (14), Bonnevialle (8), Bouchard (2), Buzeau (10), Collet (2), Crasez (6), Decanter (6), Gourvil (12), Kha Fontanel (10), Lacroix (10), Lopes (4), Prejean (8),

<u>Groupe B</u> : Les autres (ceux qui auront toutes les questions de cours)