Programme de Colle - Semaine n° 13

Du 06 janvier 2025 au 10 janvier 2025

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **A** .
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"A"**.
Remarque : La note pour un membre du groupe A ne pourra pas dépasser 14
ATTENTION : A partir de cette semaine deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte $\sim$ 5 min) d'ordre pratique ou un énoncé précis d'un résultat du cours + une question de cours usuelle (Démo ou exo Banque CCP) pour chaque élève des deux groupes.

Questions courtes ($\sim$ 7 min, énoncé précis et/ou question pratique) pour tous les élèves

Donner un énoncé précis

1. Énoncé de "changement de variables dans une intégrale" puis calcul de $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ avec $a>0$
2. Énoncé précis et complet, avec majoration du reste, du "critère spécial des séries alternées"
3. Formule de Taylor avec reste intégral
4. Formule de Taylor-Young
5. Inégalité de Taylor Lagrange
6. Dérivabilité et dérivée de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$
7. Dérivabilité et dérivée de la somme d'une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$
8. Définition et caractérisations de la norme d'opérateurs pour une application linéaire continue
9. Définition du rayon de convergence et expressions et/ou caractérisations
10. DSE (et rayon de convergence) de 3 fonctions parmi les fonctions usuelles : exp, cos, sin, $x \to \dfrac{1}{1-x}$, $x \to \ln(1-x)$, arctan, $(1+x)^\alpha$...
11. Tout énoncé relevant d'un point du paragraphe "Exercices et Questions de cours"

Suites et séries de fonctions

- Convergences, continuité, dérivabilité, intégration de la limite ou la somme
- Approximation d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escalier, par des polynomes

Intégration et dérivation

Rappels

Primitives et intégrales

- Primitives d'une fonction continue ; Théorème fondamental
- Intégration par parties ; Changement de variables ; Théorèmes de Taylor

Séries entières

- Définition
- Lemme d'Abel, rayon de convergence.
- Opérations algèbriques sur les séries entières : somme, produit de Cauchy.
- Mode de convergence des séries entières
- Dérivée et primitive d'une somme de séries entières
- Fonctions développables en série entière, unicité si existence.
- Développements en séries entières usuels

Exercices et Questions de cours

1. Convergence des sommes de Riemann
2. **TOUS** Obtention des DSE des fonctions usuelles : exp, cos, sin, $x \to \dfrac{1}{1-x}$, $x \to \ln(1-x)$, arctan, $x \to (1+x)^\alpha$... (sauf Groupe A pour la dernière)

3. **TOUS** Lemme de Lebesgue. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\,\sin(nt)\,dt = 0$
4. Domaine de définition, continuité, limite aux bornes de $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$
5. Théorème de Taylor avec reste intégral
6. **TOUS** Pour $x \in [-1,1]$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-x)^n}{n(n-1)}$. Calculer $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$ de deux façons : à l'aide d'une DES et en calculant $f'(x)$
7. Lemme d'Abel
8. **TOUS** Règle de d'Alembert pour l'estimation du rayon de convergence d'une série entière
9. Caractérisations du rayon de convergence d'une série entière
10. Mode de convergence d'une série entière
11. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_0 = a_1 = 1 = -a_2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$. Domaine de définition et expression de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
12. **TOUS : Banque CCP : Ex 10** On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right) \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.
    (a) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
    (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \left(x^2+1\right) \dfrac{ne^x+xe^{-x}}{n+x} \mathrm{d}x$.
13. **TOUS Banque CCP : Ex 2**
    On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.
    (a) Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
    (b) En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r > 0$).
    Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
    (c) i. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.
    On pose, pour tout $x \in]-R,R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
    Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
    ii. En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
14. **Banque CCP : Ex 18**
    On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.
    (a) Étudier la convergence simple de cette série.
    On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
    (b) i. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
    ii. La fonction S est-elle continue sur D ?
15. **TOUS Banque CCP : Ex 16**
    On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :
    $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$
    On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left[\ \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}\right]$.
    (a) Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
    (b) Calculer $S'(1)$.
16. BANQUE CCP 53
    On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

(a) i. Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

ii. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

$\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

iii. $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

(b) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

(c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

17. **TOUS Banque CCP : Ex 22**

(a) Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

(b) Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon, la fonction $f\ :\ x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?.

18. **Banque CCP : Ex 51**

(a) Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

(b) Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

(c) En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.

(d) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

19. **TOUS** Continuité en a de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues en a
20. **TOUS** Changement de variables dans une intégrale
21. Rolle et accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles
22. **TOUS** Dérivation de $B(f,g)$ lorsque B est bilinéaire et f et g sont dérivables.
23. BANQUE CCP 53

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^4}$.

(a) i. Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

ii. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

$\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

iii. $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

(b) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

(c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Prochain programme : Exponentielle. Séries entières

Groupe A : Ahchouch (8), Astier (4), Auffret (14), Boccovi (14), Bonnevialle (8), Bouchard (2), Buzeau (10), Collet (2), Crasez (6), Decanter (6), Gourvil (12), Kha Fontanel (10), Lacroix (10), Lopes (4), Prejean (8),

Groupe B : Les autres (ceux qui auront toutes les questions de cours)