Programme de Colle - Semaine n° 15

Du 20 janvier 2025 au 24 janvier 2025

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **A** .
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"A"**.
Remarque : La note pour un membre du groupe A ne pourra pas dépasser 14
ATTENTION : A partir de cette semaine deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte $\sim$ 5 min) d'ordre pratique ou un énoncé précis d'un résultat du cours + une question de cours usuelle (Démo ou exo Banque CCP) pour chaque élève des deux groupes.

Questions courtes ($\sim$ 7 min, énoncé précis et/ou question pratique) pour tous les élèves

1. Option 1 : Déterminer la nature (convergence ou non convergence) des intégrales suivantes

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$ *Oui*

   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ *Oui*

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}dx$ *Oui*

   (d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ *Oui*

   (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx$ *Oui*

   (f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$ *Oui*

2. Option 2 : Énoncé précis :

   (a) Changement de variables dans une intégrale impropre
   (b) Intégration par parties généralisée
   (c) Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions
   (d) Théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions
   (e) Théorème d'intégration terme à terme (cas non positif)
   (f) Théorème de continuité sous domination
   (g) Théorème de Leibniz (dérivation des intégrales à paramètre)
   (h) Formule de Taylor avec reste intégral
   (i) Inégalité de Taylor Lagrange
   (j) Dérivabilité et dérivée de la somme d'une série de fonctions $\mathscr{C}^1$

Cours

Suites et séries de fonctions, séries entières

Tout ce qui a été vu : mode de convergence, opération, continuité, intégration, dérivation, DSE usuels...

Intégration généralisée

- ✏ Intégrale convergente sur un intervalle quelconque, linéarité, additivité
- ✏ Intégrabilité d'une fonction sur un intervalle
- ✏ Intégrabilité des fonctions positives : comparaison, domination, équivalence.
- ✏ Fonctions de référence
- ✏ Intégration par parties et changement de variables sur les intégrales convergentes
- ✏ **Théorème de convergence dominée** pour les suites (ou séries ou familles) de fonctions
- ✏ Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Intégrale dépendant d'un paramètre

- ✏ Théorème de continuité sous domination
- ✏ Théorème de Leibniz (ou théorème de dérivation des intégrales à paramètres). Extension aux dérivations k-ièmes.

Exercices et Questions de cours

Si besoin, le colleur pourra rappeler que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. **TOUS** Existence et valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ pour $n \in \mathbb{N}$

2. **TOUS** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$

3. **TOUS** Pour $x \in [-1,1]$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)}$. Calculer $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$ de deux façons : à l'aide d'une DES et en calculant $f'(x)$

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_0 = a_1 = 1 = -a_2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$. Domaine de définition et expression de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

5. **Banque CCP : Ex 25**
   (a) Démontrer que, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   (b) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6. **Banque CCP : Ex 26**
   Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier que I_n est bien définie.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.
   (c) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

7. **TOUS** **Banque CCP : Ex 30**
   (a) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
   (b) Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (c) i. Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   ii. Résoudre (E) .

8. **TOUS** **Banque CCP : Ex 14**
   (a) Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
   (c) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

9. **Banque CCP : Ex 27**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
   (b) Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
   (c) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
   (d) Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

10. Domaine de définition, continuité, limite aux bornes de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$

11. **TOUS** **: Banque CCP : Ex 10** On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.
    (a) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

(b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(x^2+1\right) \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \mathrm{d}x$.

12. **TOUS : Banque 29** On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\forall\, t \in\,]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

 (a) Démontrer que : $\forall\, x \in\,]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

 On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

 (b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

 (c) Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

13. **Banque CCP : Ex 2**

 On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

 (a) Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

 (b) En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.

 (c) i. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

 On pose, pour tout $x \in\,]-R,R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

 Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

 ii. En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

14. **Banque CCP : Ex 18**

 On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

 (a) Étudier la convergence simple de cette série.

 On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

 (b) i. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

 ii. La fonction S est-elle continue sur D ?

15. **Banque CCP : Ex 51**

 (a) Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

 On se propose de calculer la somme de cette série.

 (b) Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

 Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

 (c) En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.

 (d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Prochain programme : **Probabilités**

Groupe A : Ahchouch (8), Astier (4), Auffret (14), Boccovi (14), Bonnevialle (8), Bouchard (2), Buzeau (10), Collet (2), Crasez (6), Decanter (6), Gourvil (12), Kha Fontanel (10), Lacroix (10), Lopes (4), Prejean (8),

Groupe B : Les autres (ceux qui auront toutes les questions de cours)