

Programme de Colle - Semaine n° 16

Du 27 janvier 2025 au 31 janvier 2025

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.

Pour le premier groupe, appelé "**Groupe A**", les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **A**.

Le second groupe, appelé "**Groupe B**", les questions de cours intégreront toutes les questions de cours sauf celles notées "**A**".

Remarque : La note pour un membre du groupe A ne pourra pas dépasser 14

ATTENTION : A partir de cette semaine deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte ~ 5 min) d'ordre pratique ou un énoncé précis d'un résultat du cours + une question de cours usuelle (Démonstration ou exo Banque CCP) pour chaque élève des deux groupes.

Questions courtes (~ 7 min, énoncé précis et/ou question pratique) pour tous les élèves

1. Option 1 : Déterminer la nature (convergence ou non convergence) des intégrales suivantes

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x} \quad \text{Oui} \qquad (c) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} dx \quad \text{Oui} \qquad (e) \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx \quad \text{Oui}$$

$$(b) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \quad \text{Oui} \qquad (d) \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx \quad \text{Oui} \qquad (f) \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2 - 1} dt \quad \text{Oui}$$

2. Option 2 : Énoncé précis :

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> (a) Changement de variables dans une intégrale impropre (b) Intégration par parties généralisée (c) Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions (d) Théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions (e) Théorème d'intégration terme à terme (cas non positif) (f) Théorème de continuité sous domination | <ul style="list-style-type: none"> (g) Théorème de Leibniz (dérivation des intégrales à paramètre) (h) Formule de Taylor avec reste intégral (i) Inégalité de Taylor Lagrange (j) Dérivabilité et dérivée de la somme d'une série de fonctions \mathcal{C}^1 (k) Définitions d'une tribu et d'un espace probabilisé |
|--|---|

Cours

Suites et séries de fonctions, séries entières

Tout ce qui a été vu : mode de convergence, opération, continuité, intégration, dérivation, DSE usuels...

Intégration généralisée

- ⇒ Intégrale convergente sur un intervalle quelconque, linéarité, additivité
- ⇒ Intégrabilité d'une fonction sur un intervalle
- ⇒ Intégrabilité des fonctions positives : comparaison, domination, équivalence.
- ⇒ Fonctions de référence
- ⇒ Intégration par parties et changement de variables sur les intégrales convergentes
- ⇒ **Théorème de convergence dominée** pour les suites (ou séries ou familles) de fonctions
- ⇒ Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Intégrale dépendant d'un paramètre

- ⇒ Théorème de continuité sous domination
- ⇒ Théorème de Leibniz (ou théorème de dérivation des intégrales à paramètres). Extension aux dérivations k-ièmes.

Probabilités

Ensembles dénombrables

- ⇒ Définition
- ⇒ Une partie de \mathbb{N} est finie ou dénombrable
- ⇒ Produit fini, réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables
- ⇒ \mathbb{R} n'est pas dénombrable

Espaces probabilisés

- ⇒ Espace probabilisable : tribu, système complet d'événements
- ⇒ Probabilité : Théorème de continuité croissante, th. de continuité décroissante.
- ⇒ Inégalité de Boole (ou sous-additivité)
- ⇒ Distribution de probabilités discrètes : famille de réels positifs indexée par Ω sommable de somme 1 (le support de cette distribution est alors fini ou dénombrable). Cette distribution $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs définit une unique probabilité
- ⇒ Probabilité conditionnelle : définition, formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes
- ⇒ Indépendance : famille d'événements mutuellement indépendants

Variables aléatoires discrètes

- ⇒ Variable aléatoire discrète .Loi de probabilité d'une v.a.d.
- ⇒ Couple de v.a.d. : lois marginales, loi conjointe, indépendance
- ⇒ Indépendance mutuelle d'une famille finie de v.a.d. : lemme des coalitions
- ⇒ Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson

Exercices et Questions de cours

Si besoin, le colleur pourra rappeler que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. Inégalité de Boole (ou sous-additivité)
2. **TOUS** Théorème de continuité croissante
3. **TOUS** Existence et valeur de $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$
4. **TOUS** $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$
5. **TOUS** Pour $x \in [-1, 1]$, on pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)}$. Calculer $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$ de deux façons : à l'aide d'une DES et en calculant $f'(x)$
6. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $a_0 = a_1 = 1 = -a_2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$. Domaine de définition et expression de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
7. **Banque CCP : Ex 25**
 - (a) Démontrer que, pour tout entier n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
 - (b) On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
8. **Banque CCP : Ex 26**

Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

 - (a) Justifier que I_n est bien définie.
 - (b) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.
 - (c) La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?
9. **TOUS Banque CCP : Ex 30**
 - (a) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
 - (b) Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
 - (c) i. Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

ii. Résoudre (E) .

10. **TOUS Banque CCP : Ex 14**

(a) Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

vers $\int_a^b f(x) dx$.

(b) Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

(c) Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

11. **Banque CCP : Ex 27**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.

(b) Soit $a \in]0, 1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?

(c) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

(d) Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

12. Domaine de définition, continuité, limite aux bornes de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$

13. **TOUS : Banque CCP : Ex 10** On pose $f_n(x) = (x^2+1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

(a) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

(b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2+1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$.

14. **TOUS : Banque 29** On pose : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$.

(a) Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

(b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

(c) Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

15. **Banque CCP : Ex 2**

On pose $f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$.

(a) Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

(b) En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$).

Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.

(c) i. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exprimer, pour tout entier p , en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

ii. En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

16. **Banque CCP : Ex 18**

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$.

(a) Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

(b) i. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D .

ii. La fonction S est-elle continue sur D ?

17. Banque CCP : Ex 51

(a) Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

(b) Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

(c) En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \text{Arcsin } x$ ainsi que son rayon de convergence.

(d) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$.

Prochain programme : Probabilités : Espérance, variance

Groupe A : Ahchouch (8), Astier (4), Auffret (14), Boccovi (14), Bonneville (8), Bouchard (2), Buzeau (10), Collet (2), Crasez (6), Decanter (6), Gourvil (12), Kha Fontanel (10), Lacroix (10), Lopes (4), Prejean (8),

Groupe B : Les autres (ceux qui auront toutes les questions de cours)