Programme de Colle - Semaine n° 17

Du 03 février 2025 au 07 février 2025

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **A** .
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"A"**.
Remarque : La note pour un membre du groupe A ne pourra pas dépasser 14
ATTENTION : A partir de cette semaine deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte $\sim$ 5 min) d'ordre pratique ou un énoncé précis d'un résultat du cours + une question de cours usuelle (Démo ou exo Banque CCP) pour chaque élève des deux groupes.

Questions courtes ($\sim$ 7 min, énoncé précis et/ou question pratique) pour tous les élèves

1. Option 1 : Déterminer la nature (convergence ou non convergence) des intégrales suivantes
   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$ *Oui*
   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ *Oui*
   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}dx$ *Oui*
   (d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ *Oui*
   (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx$ *Oui*
   (f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt$ *Oui*
2. Option 2 : Énoncé précis :
   (a) Changement de variables dans une intégrale impropre
   (b) Intégration par parties généralisée
   (c) Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions
   (d) Théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions
   (e) Théorème d'intégration terme à terme (cas non positif)
   (f) Théorème de continuité sous domination
   (g) Théorème de Leibniz (dérivation des intégrales à paramètre)
   (h) Formule de Taylor avec reste intégral
   (i) Inégalité de Taylor Lagrange
   (j) Dérivabilité et dérivée de la somme d'une série de fonctions $\mathscr{C}^1$
   (k) Définitions d'une tribu et d'un espace probabilisé
   (l) Énoncé du lemme de coalition

Cours

Intégrales dépendant d'un paramètre

Th. de convergence dominée, th. d'intégration terme à termes, continuité et dérivabilité des intégrales à paramètre.

Probabilités

Ensembles dénombrables

- ✏ Définition
- ✏ Une partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable
- ✏ Produit fini, réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables
- ✏ $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Espaces probabilisés

- ✏ Espace probabilisable : tribu, système complet d'événements
- ✏ Probabilité : Théorème de continuité croissante , th. de continuité décroissante.
- ✏ Inégalité de Boole (ou sous-additivité)
- ✏ Distribution de probabilités discrètes : famille de réels positifs indexée par Ω sommable de somme 1 (le support de cette distribution est alors fini ou dénombrable). Cette distribution $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs définit une unique probabilité
- ✏ Probabilité conditionnelle : définition, formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes
- ✏ Indépendance : famille d'événements mutuellement indépendants

Variables aléatoires discrètes

- ✏ Variable aléatoire discrète .Loi de probabilité d'une v.a.d.
- ✏ Couple de v.a.d. : lois marginales, loi conjointe, indépendance
- ✏ Indépendance mutuelle d'une famille finie de v.a.d. : lemme des coalitions
- ✏ Lois usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson

Espérance, Variance

- ✏ Espérance : définition, propriétés, formule de transfert.
  Pour une variable aléatoire X à valeurs entières, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$, Inégalité de Markov
- ✏ Variance : Moments d'ordre m, variance, écart-type, Inégalité de Bienaimé-Thebychev, Covariance, Loi faible des grands nombres
- ✏ Fonctions génératrices : définition, espérance et variance

Exercices et Questions de cours

Si besoin, le colleur pourra rappeler que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. Inégalité de Boole (ou sous-additivité)
2. **TOUS** Théorème de continuité croissante
3. **TOUS** Inégalité de Markov
4. **TOUS** Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
5. Loi faible des grands nombres
6. Variance d'une somme de v.a.r.d. indépendantes
7. **TOUS** Cauchy-Schwarz $(\mathbb{E}(XY))^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$
8. **TOUS** **Banque CCP MP 103**
   Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. *Remarque : les questions (a) et (b) sont indépendantes*
   (a) i. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   ii. En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p). Déterminer la loi de X.
9. **Banque CCP MP 108**
   Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :
   $\forall (i,j) \in (\mathbb{N})^2, \mathbb{P}\left((X = i) \bigcap (Y = j)\right) = \dfrac{1}{e\, 2^{i+1}\, j!}$.
   (a) Déterminer les lois de X et Y.
   (b) i. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$
   ii. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$
   (c) les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (d) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$
10. **Banque CCP MP 109**
    Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
    On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
    On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.
    (a) Déterminer la loi de X.
    (b) Déterminer la loi de Y.
11. <u>**TOUS**</u> Existence et valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$
12. <u>**TOUS**</u> $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$
13. **Banque CCP : Ex 25**
    (a) Démontrer que, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
    (b) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.
14. **Banque CCP : Ex 26**
    Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^n} \mathrm{d}t$.

(a) Justifier que I_n est bien définie.
(b) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.
(c) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

15. **<u>TOUS</u> Banque CCP : Ex 30**

(a) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
(b) Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
(c) i. Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
ii. Résoudre (E) .

16. **Banque 29** On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

(a) Démontrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t.$
(b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
(c) Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

17. **TOUS Banque CCP 110**
Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé.

(a) Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On considère la série entière $\sum t^n P(X=n)$ de variable réelle t.
On note R_X son rayon de convergence.
i. Prouver que $R \geqslant 1$. On pose alors $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.
Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.
ii. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X=k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

(b) i. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Déterminer D_{G_X} et, $\forall\, t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
ii. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

<u>Prochain programme :</u> Espacesprehilbertiens réels, Endomorphisme dans espace euclidien

<u>Groupe A</u> : Ahchouch (8), Astier (4), Auffret (14), Boccovi (14), Bonnevialle (8), Bouchard (2), Buzeau (10), Collet (2), Crasez (6), Decanter (6), Gourvil (12), Kha Fontanel (10), Lacroix (10), Lopes (4), Prejean (8),
<u>Groupe B</u> : Les autres (ceux qui auront toutes les questions de cours)