Programme de Colle - Semaine n° 20

Du 10 mars 2025 au 14 mars 2025

Pour adapter au mieux les niveaux des questions de cours lors des interrogations, les élèves sont répartis en deux groupes, groupes pouvant changer d'une semaine à l'autre selon les résultats et les progressions.
Pour le premier groupe, appelé **"Groupe A"**, les questions de cours ne porteront que sur celles notées **TOUS** ou notées **A** .
Le second groupe, appelé **"Groupe B"**, les questions de cours intègreront toutes les questions de cours sauf celles notées **"A"**.
Remarque : La note pour un membre du groupe A ne pourra pas dépasser 14
ATTENTION : A partir de cette semaine deux questions de "cours" seront posées aux élèves des deux groupes : une question (courte ~ 10 min) d'ordre pratique + une question de cours usuelle (Démo ou exo Banque CCP) pour chaque élève des deux groupes.

Questions courtes (~ 10 min) d'ordre pratique

notées de +2 en cas de résolution rapide et parfaite à -3 en cas de défaillance manifeste dans la connaissance du cours

Reconnaitre l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

1. $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & -4 & 3 \\ -4 & -3 & 12 \\ 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

   Solution

   A est la matrice de la réflexion d'axe le plan d'équation $x + 4y - 3z = 0$

2. $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

   Solution

   A est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$ (bijection réciproque de la matrice de l'exercice 2)

3. $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

   Solution

   A est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Solution

   A est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$

Résoudre l' équation différentielle suivante :

1. $y" + 2y' + y = \operatorname{ch} x$

   Solution

   $x \to \dfrac{\operatorname{ch}(x) + x^2 e^{-x}}{4} + (Ax + B)e^{-x}$

2. $x" + 5x' + 4x = e^{-2t}\sin t.$

   Solution

   $t \mapsto -\dfrac{\cos t + 3\sin t}{10}\, e^{-2t} + Ae^{-t} + Ae^{-4t}$

Cours

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

- ✏ Produit scalaire. Norme euclidienne (ou pré-hilbertienne)
- ✏ Propriétés : identité de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski

Orthogonalité

- ✏ Famille orthogonale, famille orthonormale
- ✏ Orthonormalisation de Schmidt
- ✏ Expressions dans une base orthonormale d'un espace euclidien
- ✏ Orthogonalité de parties d'un espace pré-hilbertien
- ✏ Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.
- ✏ Projections et symétries orthogonales.
- ✏ Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie

Endomorphismes d'un espace euclidien

Adjoint d'un endomorphisme

- ✏ Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien
- ✏ Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien
- ✏ Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint
- ✏ Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée.
- ✏ Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*

Isométries vectorielles

- ✏ Isométrie vectorielle d'un espace euclidien
- ✏ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable
- ✏ Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale
- ✏ Réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.

Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

- ✏ Endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) d'un espace euclidien
- ✏ Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs autoadjoints
- ✏ Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable
- ✏ Théorème spectral : si u est un endomorphisme autoadjoint, u est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) en base orthonormale.
- ✏ Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Définition et carctérisation à l'aide du spectre.
- ✏ Traduction matricielle

Equations différentielles linéaires

Révision des chapitres vus en MPSI

- ✏ Équation : $y' + a(t)y = b(t)$ avec a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$
- ✏ Équation : $y'' + ay' + by = c(t)$ avec a et b deux constantes de $\mathbb{K}$ et c combinaison linéaire de fonctions du type : $t \mapsto e^{\alpha t} P(t)$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et P polynôme.

Equation différentielle linéaire scalaire du premier ordre

- ✏ Equations résolues en y' : Solutions de l'équation (E_H), solutions de (E), théorème de Cauchy.
- ✏ Equations non résolues en y' : problemes de raccord.

Exercices et Questions de cours

1. **TOUS** Espérance, variance, fonction génératrice des lois usuelles (une ou deux par élève...)
2. Inégalité de Boole (ou sous-additivité)
3. **TOUS** Théorème de continuité croissante
4. **Groupe A** Inégalité de Markov et inégalité de Bienaymé-Tchebychev
5. Loi faible des grands nombres
6. **TOUS** Variance d'une somme de v.a.r.d. indépendantes
7. **TOUS** Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire
8. **TOUS** Théorème de la projection orthogonale (distance entre un point et un s.e.v. de dimension finie est atteinte)
9. **TOUS** Parmi les projecteurs, caractérisation des projecteurs orthogonaux par l'inégalité $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$
10. Parmi les projecteurs, caractérisation des projecteurs orthogonaux par le relation

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle$$

11. Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale
12. Réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.
13. Théorème spectral

14. **Banque CCP MP**
Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :
$\forall (i,j) \in (\mathbb{N})^2, \mathbb{P}\left((X=i)\bigcap(Y=j)\right) = \dfrac{1}{e\,2^{i+1}\,j!}$.
   (a) Déterminer les lois de X et Y.
   (b) i. Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$
   ii. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$
   (c) les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (d) Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$

15. **TOUS Banque CCP MP 78**

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.
   (a) Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   i. Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   ii. Démontrer que u est bijectif.
   (b) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
   (c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

16. **Banque CCP 80**
Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
   (b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

17. **Banque CCP 63**
Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\left(\,|\,\right)$. On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.
   (a) Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E, \big(u(x)\big|x\big) = 0$ est-il forcément l'endomorphisme nul ?
   (b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$
   ii. $\forall (x,y) \in E^2, \big(u(x)\big|u(y)\big) = \big(u^*(x)\big|u^*(y)\big)$
   iii. $\forall x \in E, \big\|u(x)\big\| = \big\|u^*(x)\big\|$

18. **Banque 81**
On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$, où $\mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
   (c) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
   (d) Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

19. **TOUS Banque CCP 66**
   (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   Prouver que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$
   (b) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
   (c) Prouver que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), AB = BA \Longrightarrow A^2B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
   (d) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$

20. **Banque CCP 111**. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
   (a) Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X=n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.
      i. Prouver que $R \geqslant 1$. On pose alors $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
      Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.
      Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.
      ii. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X=k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
   (b) i. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
      Déterminer D_{G_X} et, $\forall\, t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
      ii. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
      Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

Prochain programme : **Equations différentielles**

Groupe A : Ahchouch (8), Alary (2), Astier (4), Auffret (14), Boccovi (14), Bonnevialle (8), Bouchard (2), Buzeau (10), Collet (2), Crasez (6), Decanter (6), Gourvil (12), Kha Fontanel (10), Lacroix (10), Lopes (4), Prejean (8),
Groupe B : Les autres (ceux qui auront toutes les questions de cours)