Devoir en temps libre n° 01

Ce devoir est constitué de deux petits problèmes.

Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaitre clairement sur la première page le nombre de copies.

Problème 1

Etude de fonctions

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$ et $g(x) = -x\ln(x)$
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et de g.

Partie I : Tracés de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et positions relatives

1. Etudier les fonctions f et g. On veillera aux limites aux bornes du domaine de définition.

2. Tracer, sur deux graphes différents les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3. On pose : $\phi(x) = \dfrac{f(x)-g(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que ϕ est dérivable sur $x \in \mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression factorisée de $\phi'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

4. Calculer $\phi(1)$ et en déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Partie II : Calcul d'intégrales

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $I(a) = \displaystyle\int_a^1 f(x)dx$ et $J(a) = \displaystyle\int_a^1 g(x)dx$

1. Calculer $I(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

2. On pose $\psi(x) = x^2\ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée. En déduire une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$ puis la valeur de $J(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

3. On rappelle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \psi(x) = 0$.

4. En déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} (I(a) - J(a))$.

Partie III : Résolution approchée d'une équation

1. Justifier que l'équation $g(x) = -24$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on notera α et montrer que $\alpha \in [9,11]$.

2. On pose $h(x) = \dfrac{24}{\ln x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2.a) Montrer que, pour tout $x \in [9,11]$, $h(x) \in [9,11]$.

2.b) On pose $K = \dfrac{2}{3(\ln 3)^2}$. Montrer que, pour tout $t \in [9,11]$, $|h'(t)| \leqslant K$

2.c) En déduire que pour tout $x \in [9,11]$, $|h(x) - h(\alpha)| \leqslant K|x-\alpha|$.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.

3.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [9,11]$ puis que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant K|u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3.b) En déduire que $|u_n - \alpha| \leqslant 2K^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

3.c) En utilisant ce qui précède, écrire un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de α à ε près où $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Utiliser cet algorithme pour déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de α.

Problème 2

Racines 11^{e} de l'unité

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $U_n = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^n = 1\right\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

1.a) Montrer que $(U_n, \times)$ est un groupe commutatif (les propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont supposées connues) .

1.b) Déterminer les éléments de U_n. Montrer que leur somme est nulle.

2. Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{11}}$. On pose $S = u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9$ et $T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$

2.a) Montrer, sans calculs, que S et T sont conjugués $\left(\text{utiliser } u^{11} = 1 \text{ et que } \overline{u} = \dfrac{1}{u}\right)$.

2.b) Montrer que la partie imaginaire de S est positive (sans calcul numérique) .

2.c) Démontrer que $S + T = -1$ et $S \times T = 3$. En déduire les valeurs de S et T.

2.d) Montrer que : $i \tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) = \dfrac{u^3 - 1}{u^3 + 1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \left(-u^3\right)^k$ puis que : $4i \sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = 2\left(u - u^{10}\right)$

2.e) En déduire que : $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = i\,(T - S) = \sqrt{11}$

Corrigé : Etude de fonctions

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$ et $g(x) = -x\ln(x)$
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et de g.

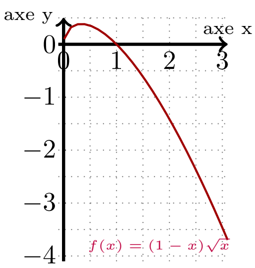
Partie I : Tracés de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et positions relatives

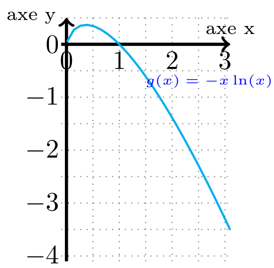
1. Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{1-3x}{2\sqrt{x}} \textbf{ et } g'(x) = -(1+\ln(x))}$.
Par ailleurs, en comparant les limites des fonctions usuelles, on a :
$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \textbf{ et } \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0}$. Remarquons qu'en étudiant les limites de $\dfrac{f(x)}{x}$ et $\dfrac{g(x)}{x}$ en 0 et en $+\infty$, on trouve que les deux courbes admettent une branche parabolique d'axe (Oy) en $+\infty$, et une demi-tangente verticale en 0^+ .
On obtient les tableaux de variation :

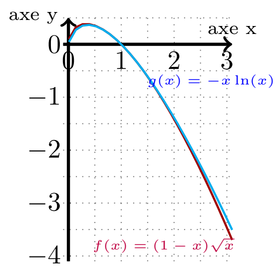
x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\infty$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

2. Tracer, sur deux graphes différents les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.







3. On pose : $\phi(x) = \dfrac{f(x)-g(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. ϕ est dérivable sur $x \in \mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\boxed{\phi'(x) = -\dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{2x\sqrt{x}}}$.

4. Comme $\phi(1) = 0$ et que ϕ est décroissante, on en déduit que ϕ est positive sur $]0,1]$ et négative sur $[1,+\infty[$. Donc $\boxed{\mathscr{C}_f \textbf{ est au dessus de } \mathscr{C}_g \textbf{ sur }]0,1] \textbf{ et en dessous sur } [1,+\infty[}$.

Partie II : Calcul d'intégrales

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $I(a) = \displaystyle\int_a^1 f(x)dx$ et $J(a) = \displaystyle\int_a^1 g(x)dx$

1. $I(a) = \left[\dfrac{2}{3}t^{3/2} - \dfrac{2}{5}t^{5/2}\right]_a^1$. Donc $\boxed{I(a) = \dfrac{4}{15} - \dfrac{2}{3}a^{3/2} + \dfrac{2}{5}a^{5/2}}$.

2. On pose $\psi(x) = x^2\ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $\boxed{\psi'(x) = 2\,x\,\ln(x) + x}$. Donc $\boxed{\textbf{une primitive de } g \textbf{ est } x \to \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^2\ln(x)}{2}}$. Ainsi pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{J(a) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2\ln(a)}{2}}$.

3. En posant $t = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et en utilisant $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \psi(x) = 0}$.

4. $I(a)$ et $J(a)$ tendent respectivement vers $\dfrac{4}{15}$ et $\dfrac{1}{4}$ lorsque a tend vers 0. Donc $\boxed{\lim\limits_{a\to 0^+}(I(a)-J(a))=\dfrac{1}{60}}$

Partie III : Résolution approchée d'une équation

1. g est positive sur $]0,1]$ et est continue, strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ avec la valeur 0 en 1 et la limite $-\infty$ en $+\infty$. Ainsi, par théorème d'homéomorphisme,
$\boxed{g \text{ est une bijection de } [1,+\infty[\text{ vers }]-\infty,0]}$. En particulier
$\boxed{\text{l'équation } g(x)=-24 \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+^* \text{ que l'on note } \alpha}$.
Comme $g(9)=-19.78$ à 10^{-2} près et $g(11)=-26.38$ à 10^{-2} près, on a : $g(9)>g(\alpha)=-24>g(11)$ donc par décroissance de g, on a $\boxed{\alpha\in[9,11]}$.

2. On pose $h(x)=\dfrac{24}{\ln x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

2.a) Par positivité et croissance de ln sur $[9,11]$, h est décroissante sur $[9,11]$. Or $h(9)=10.92$ à 10^{-2} près et $h(11)=10.01$ à 10^{-2} près sont dans $[9,11]$. Ainsi $\boxed{\forall x\in[9,11],\quad h(x)\in[9,11]}$

2.b) Pour tout $x\in[9,11]$, $h'(x)=-\dfrac{24}{x\ln^2(x)}$. Ainsi $|h'|$ est décroissante sur $[9,11]$. Comme $|h'(9)|=\dfrac{2}{3(\ln 3)^2}=K$, on a : $\boxed{\forall t\in[9,11],\quad |h'(t)|\leqslant K}$

2.c) Soit $x\in[9,11]$. On a : $|h(x)-h(\alpha)|=\left|\displaystyle\int_\alpha^x h'(t)dt\right|\leqslant\left|\displaystyle\int_\alpha^x |h'(t)|\,dt\right|\leqslant\left|\displaystyle\int_\alpha^x K dt\right|$. Ainsi, pour tout $x\in[9,11]$, $\boxed{|h(x)-h(\alpha)|\leqslant K\,|x-\alpha|}$.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=9$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=h(u_n)$.

3.a) Comme on a $u_0\in[9,11]$ et $[9,11]$ stable par h, on a : $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n\in[9,11]}$. Ensuite, on remarque que, comme $g(\alpha)=-24$, alors $h(\alpha)=\alpha$. Donc en appliquant l'inégalité obtenue en 2.c) à $x=u_n$, on a : $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-\alpha|\leqslant K\,|u_n-\alpha|}$

3.b) Par récurrence immédiate, on en déduit que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-\alpha|\leqslant 2\,K^n}$ avec $K<1$. Ainsi, par le théorème des gendarmes, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha}$

3.c) On peut proposer l'algorithme suivant (on suppose importé numpy avec l'alias np) :

```python
def approchalpha(epsilon):
  """calcul d’une valeur approch\’ee de \alpha \‘{a} epsilon pr\‘{e}s """
  resultat , maj , K = 9 , 2 , 2/(3*(np.log(3))**2)
  while maj > epsilon :
    resultat = 24/np.log(resultat)
    maj *= K
  return resultat
```

On trouve avec epsilon $=10^{-6}$, $\boxed{\alpha=10.293673 \text{ à } 10^{-6} \text{ près}}$

Corrigé : Racines 11ᵉ de l'unité

1. Soit $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$. On note $U_n=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;z^n=1\right\}$.

1.a) Il est clair que U_n est non vide (contient 1), stable par multiplication (le produit de deux solutions de $z^n=1$ vérifie encore cette équation), multiplication qui reste associative, commutative, possède un élément neutre 1 qui est dans U_n, et tout élément de U_n possède un inverse qui est encore une racine n-ième de l'unité. Ainsi $\boxed{(U_n,\times) \text{ est un groupe commutatif}}$

1.b) $\boxed{U_n=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\ ;\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}}$. On pose $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$. La somme des racines n-ièmes de l'unité vaut : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k=\dfrac{1-\omega^n}{1-\omega}=0$: $\boxed{\text{la somme des éléments de } U_n \text{ est nulle}}$.

2. Soit $u=e^{\frac{2i\pi}{11}}$. On pose $S=u+u^3+u^4+u^5+u^9$ et $T=u^2+u^6+u^7+u^8+u^{10}$

2.a) Les conjugués de u, u^3, u^4, u^5 et u^9 sont respectivement u^{10}, u^8, u^7, u^6 et u^2.
Donc $\boxed{S \text{ et } T \text{ sont conjugués}}$

2.b) La partie imaginaire de S est $Y_S = \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)$. Or $\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{11}\right) = 2\sin\left(\frac{12\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{6\pi}{11}\right) > 0$ car $\sin\left(\frac{12\pi}{11}\right) < 0$ car $\pi < \frac{12\pi}{11} < 2\pi$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{11}\right) < 0$ car $\frac{\pi}{2} < \frac{6\pi}{11} < \pi$. D'autre part $\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$, $\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right)$ et $\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)$ sont positifs car les angles sont dans $[0, \pi]$. Ainsi $Y_S > 0$: **la partie imaginaire de S est positive**

2.c) $S + T = u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + u^7 + u^8 + u^9 + u^{10}$ est la somme de toutes les racines 11es de l'unité sauf 1. Donc $\boxed{S + T = -1}$.
En développant $S \times T$, on trouve : $S \times T =$
$(u^3 + u^7 + u^8 + u^9 + u^{11}) + (u^5 + u^9 + u^{10} + u^{11} + u^{13}) + (u^6 + u^{10} + u^{11} + u^{12} + u^{14}) + (u^7 + u^{11} + u^{12} + u^{13} + u^{15}) + (u^{11} + u^{15} + u^{16} + u^{17} + u^{19})$
$= (u^3 + u^7 + u^8 + u^9 + 1) + (u^5 + u^9 + u^{10} + 1 + u^2) + (u^6 + u^{10} + 1 + u + u^3) + (u^7 + 1 + u + u^2 + u^4) + (1 + u^4 + u^5 + u^6 + u^8)$
$= 5 + 2(u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + u^7 + u^8 + u^9 + u^{10}) = 5 + 2(S + T)$. Donc $\boxed{S \times T = 3}$.
On en déduit que S et T sont les racines de l'équation : $z^2 + z + 3 = 0$. Les solutions de cette équation sont $\frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}$ et $\frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$. Comme on sait que la partie imaginaire de S est positive, on en déduit :

$$\boxed{S = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2} \text{ et } T = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}}$$

2.d) Soit θ un réel non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. On a :
$i\tan(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1}$.
En appliquant ce résultat à $\theta = \frac{3\pi}{11}$, on trouve bien : $i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{e^{\frac{6i\pi}{11}} - 1}{e^{\frac{6i\pi}{11}} + 1} = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1}$.

D'autre part, en utilisant la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique, on a : $\sum_{k=1}^{10} (-u^3)^k = -u^3 \frac{1 - (-u^3)^{10}}{1 + u^3} = \frac{-u^3 + u^{33}}{1 + u^3} = \frac{1 - u^3}{1 + u^3}$.

Ainsi, on a bien $\boxed{i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1} = -\sum_{k=1}^{10} (-u^3)^k}$.

Par ailleurs : $2(u - u^{10}) = 2(u - \overline{u}) = 4i\,\mathrm{Im}(u)$ donc $\boxed{4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = 2(u - u^{10})}$

2.e) $i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = u^3 - u^6 + u^9 - u^{12} + u^{15} - u^{18} + u^{21} - u^{24} + u^{27} - u^{30} + 2u - 2u^{10}$
donc $i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = u^3 - u^6 + u^9 - u + u^4 - u^7 + u^{10} - u^2 + u^5 - u^8 + 2u - 2u^{10} =$
$(u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9) - (u^2 - u^6 - u^7 - u^8 - u^{10}) = S - T$

Donc $\boxed{\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = i(T - S) = \sqrt{11}}$