Devoir en temps libre n° 01

Ce devoir est constitué de deux petits problèmes.

Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaitre clairement sur la première page le nombre de copies.

Problème 1

Etude de fonctions

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$ et $g(x) = -x\ln(x)$
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et de g.

Partie I : Tracés de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et positions relatives

1. Etudier les fonctions f et g. On veillera aux limites aux bornes du domaine de définition.

2. Tracer, sur deux graphes différents les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3. On pose : $\phi(x) = \dfrac{f(x)-g(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que ϕ est dérivable sur $x \in \mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression factorisée de $\phi'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

4. Calculer $\phi(1)$ et en déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Partie II : Calcul d'intégrales

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $I(a) = \displaystyle\int_a^1 f(x)dx$ et $J(a) = \displaystyle\int_a^1 g(x)dx$

1. Calculer $I(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

2. On pose $\psi(x) = x^2\ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée. En déduire une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$ puis la valeur de $J(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

3. On rappelle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \psi(x) = 0$.

4. En déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} (I(a) - J(a))$.

Partie III : Résolution approchée d'une équation

1. Justifier que l'équation $g(x) = -24$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on notera α et montrer que $\alpha \in [9, 11]$.

2. On pose $h(x) = \dfrac{24}{\ln x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2.a) Montrer que, pour tout $x \in [9, 11]$, $h(x) \in [9, 11]$.

2.b) On pose $K = \dfrac{2}{3\,(\ln 3)^2}$. Montrer que, pour tout $t \in [9, 11]$, $|h'(t)| \leqslant K$

2.c) En déduire que pour tout $x \in [9, 11]$, $|h(x) - h(\alpha)| \leqslant K\,|x - \alpha|$.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.

3.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [9, 11]$ puis que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant K\,|u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3.b) En déduire que $|u_n - \alpha| \leqslant 2\,K^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

3.c) En utilisant ce qui précède, écrire un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de α à ε près où $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Utiliser cet algorithme pour déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de α.

Problème 2

Racines 11[e] de l'unité

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $U_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^n = 1 \right\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

1.a) Montrer que $(U_n, \times)$ est un groupe commutatif (les propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont supposées connues) .

1.b) Déterminer les éléments de U_n. Montrer que leur somme est nulle.

2. Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{11}}$. On pose $S = u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9$ et $T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$

2.a) Montrer, sans calculs, que S et T sont conjugués $\left(\text{utiliser } u^{11} = 1 \text{ et que } \overline{u} = \frac{1}{u}\right)$.

2.b) Montrer que la partie imaginaire de S est positive (sans calcul numérique) .

2.c) Démontrer que $S + T = -1$ et $S \times T = 3$. En déduire les valeurs de S et T.

2.d) Montrer que : $i \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1} = -\sum_{k=1}^{10} \left(-u^3\right)^k$ puis que : $4i \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = 2\left(u - u^{10}\right)$

2.e) En déduire que : $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = i\,(T - S) = \sqrt{11}$