Devoir en temps libre n° 00

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PROBLEME 1

Dans tout ce problème, a désigne un réel.
On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.

La partie I étudie le cas où P est constant.
La partie II étudie le cas où $a \neq 1$.
La partie III étudie le cas où $a = 1$.

Partie I

Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\quad \exists b \in \mathbb{R};\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = au_n + b\right\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc b réel tel que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = au_n + b$.
Montrer l'unicité de b. On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.

2.

2.a) Déterminer $E_1^{(0)}$.

2.b) Déterminer $E_0^{(0)}$.

Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 1.

3. Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. Soit x la suite constante égale à 1 (pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_n = 1$) et soit y la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $y_n = a^n$.
Montrer que (x, y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de b_x et b_y.

5. Soit $u \in E_a^{(0)}$.

5.a) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$$

5.b) Montrer que, pour λ et μ définis à la question précédente, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

5.c) Que peut-on en conclure ?

6. Déterminer $E_a^{(0)}$. On donnera en particulier la dimension de $E_a^{(0)}$.

Partie II

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$.
On fixe un entier naturel p. On note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.
On pose $E_a^{(p)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\quad \exists P \in \mathbb{R}_p[X];\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

Montrer l'unicité de P (on pourra étudier l'application φ de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ définie par : $\varphi(P) = (P(0), P(1), ..., P(p))$).
On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

2. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

4. Déterminer $\ker \theta$ (noyau de θ).

5. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.

5.a) Quel est le degré de Q_k ?

5.b) Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, ..., Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

6.

6.a) Montrer que pour tout k dans $\{0, 1, ..., p\}$, Q_k est dans l'image de θ, notée $\operatorname{Im} \theta$.

6.b) Que peut-on en conclure ?

7. Déduire des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.

8. Pour $k \in \{0, 1, ..., p\}$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $x_n^{(k)} = n^k$.
On rappelle que y est la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $y_n = a^n$.
Montrer que $(x^{(0)}, ..., x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

9. *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

Partie III

Dans cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. En adaptant les résultats obtenus à la partie précédente, déterminer :

$$E_1^{(p)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\quad \exists P \in \mathbb{R}_p[X];\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n + P(n)\}$$

2. *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = u_n - 6n + 1 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

PROBLEME 2

Dans ce problème φ désigne une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.
On suppose par ailleurs que φ possède une limite ℓ (finie ou infinie) en $+\infty$.

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f où $f(x)$ est défini, pour x réel, comme étant l'unique solution de l'équation (E_x) d'inconnue y :

$$(E_x) \qquad \int_x^y \varphi(t)\,dt = 1$$

La partie I est consacrée à un exemple où l'on détermine explicitement f.
La partie II permet d'aboutir à l'existence de f si $\ell \neq 0$.
La partie III étudie des propriétés de la fonction f.
La partie IV illustre les parties II et III sans calcul explicite de f.

Partie I

Dans cette partie, la fonction φ est la fonction exponentielle exp.

1. Prouver que pour tout x réel l'équation (E_x) possède une unique solution notée $f(x)$.
On montrera que $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude.

3. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f. Préciser la position de celle-ci par rapport à l'asymptote.

4. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage de 0.
En déduire l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$ et la position locale de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à celle-ci.

5. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé, en utilisant les résultats des questions précédentes.

Partie II

Pour x réel, on pose $\Phi_x(u) = \displaystyle\int_x^u \varphi(t)\,dt$.

On rappelle que Φ_x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour u réel, $\Phi_x'(u) = \varphi(u)$.

1. Dans cetet question seulement, φ est définie, pour tout t réel, par : $\varphi(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.

1.a) Montrer que pour x et y réels, $\displaystyle\int_x^y \varphi(t)\,dt < 1$.

1.b) En déduire que pour tout x réel, l'équation (E_x) n'a pas de solution.

1.c) Que vaut ℓ ? *Dans tout le reste de ce problème, on suppose que* $\ell \neq 0$.

2. Exprimer l'équation (E_x) à l'aide de la fonction Φ_x.

3.

3.a) Montrer que Φ_x est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en conclure ?

3.b) Montrer qu'il existe t_0 réel et $A > 0$ tels que pour tout $t \geqslant t_0$, $\varphi(t) \geqslant A$.
On pourra distinguer les cas $\ell = +\infty$ et ℓ réel.

3.c) En déduire que pour tout x réel, il existe $u \geqslant x$ tel que $\Phi_x(u) > 1$.

3.d) En remarquant que $\Phi_x(x) = 0$, montrer que l'équation (E_x) possède une solution unique.

Jusqu'à la fin de ce problème, $f(x)$ désigne pour x réel, l'unique solution de l'équation (E_x).

Partie III

1. Montrer, en justifiant l'écriture, que pour tout x réel, $f(x) = \Phi_0^{-1}\left(\Phi_0(x) + 1\right)$ (on pourra admettre les résultats de la question **II.3**).

2. En déduire que f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.

3.a) On suppose dans cette question **a)**, que φ ne s'annule pas. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour x réel, montrer que :

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi\left(f(x)\right)}.$$

3.b) On suppose dans cette question **b)**, qu'il existe x_0 réel tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ et tel que φ reste strictement positive sur un voisinage de $f(x_0)$ sauf en $f(x_0)$ où φ s'annule.
Montrer que f n'est pas dérivable en x_0 mais que la courbe représentant f possède au point d'abscisse x_0 une tangente verticale.

4. On se propose d'étudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell = +\infty$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times$.

4.a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geqslant a$, $\varphi(t) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.

4.b) En déduire que si $x \geqslant a$, $|f(x) - x| \leqslant \varepsilon$. Que peut-on en conclure ?

5. Etudier de même la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}_+^\times$.

6. Dans cette question, on suppose φ paire. On note Γ le graphe de f.

6.a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si $(-y, -x) \in \Gamma$.

6.b) En déduire que la courbe représentant f possède un axe de symétrie à déterminer.

Partie IV

Dans cette partie, φ est la fonction définie, pour tout x réel, par $\varphi(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

1. Justifier que φ vérifie les hypothèses du problème.

2. Sans calculer $f(x)$ et en utilisant les résultats des parties précédentes, esquisser le graphe de la fonction f, en précisant les éléments remarquables (asymptotes, axe de symétrie, points à tangentes horizontales ou verticales).

Solution

Mines sup 2001 : épreuve spécifique

PROBLEME 1

Partie I

1. Soit $u \in E_a^{(0)}$. Si $\left\{\begin{array}{l} \exists b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b \\ \exists b' \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b' \end{array}\right.$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, au_n + b = au_n + b'$ c'est à dire $b = b'$.

2. 2.a) $E_1^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + b\}$. $E_1^{(0)}$ est donc l'ensemble des suites arithmétiques.
Donc $u \in E_1^0 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda n + \mu$.

2.b) $E_0^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\} / \exists b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = b\}$. $E_0^{(0)}$ est donc l'ensemble des suites stationnaires à partir du rang 1.
Donc $u \in E_0^0 \iff \exists \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \mu$.

3. Soit u et v dans $E_a^{(0)}$ et soit λ et μ deux réels.
$\forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda u + \mu v)_{n+1} = \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda(au_n + b_u) + \mu(av_n + b_v) = a(\lambda u + \mu v)_n + (\lambda b_u + \mu b_v)$.
Donc $\lambda u + \mu v \in E_a^{(0)}$ avec $b_{\lambda u + \mu v} = \lambda b_u + \mu b_v$. $E_a^{(0)}$ étant stable par combinaisons linéaires est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4.
- ✏ <u>$x \in E_a^{(0)}$ avec $b_x = 1 - a$</u> car $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 1 = ax_n + b_x = a.1 + (1 - a)$.
- ✏ <u>$y \in E_a^{(0)}$ avec $b_y = 0$</u> car $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = a^{n+1} = ay_n + b_y = a.a^n + 0$.
- ✏ <u>(x, y) est une famille libre.</u> En effet :
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha x + \beta y = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}, \alpha + \beta a^n = 0$. Cette égalité étant vraie pour tout n est vraie en particulier pour $n = 0$ et $n = 1$. Ceci conduit au système $\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta a = 0 \end{array}\right.$ avec $a \neq 1$, d'où $\alpha = \beta = 0$.

5. 5.a)

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda + \mu a = u_1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \lambda(1-a) & = & -au_0 + u_1 = -au_0 + (au_0 + b_u) = b_u \\ \mu(1-a) & = & u_0 - u_1 = u_0 - (au_0 + b_u) = u_0(1-a) - b_u \end{array}\right.$$

avec $a \neq 1$

Donc le système $\left\{\begin{array}{l} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{array}\right.$ admet pour unique solution le couple $(\lambda, \mu) = \left(\frac{b_u}{1-a}, u_0 - \frac{b_u}{1-a}\right.$

5.b) Raisonnons par récurrence : la propriété annoncée est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
Supposons qu'au rang n, $u_n = \lambda x_n + \mu y_n$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1} & = & \lambda(ax_n + b_x) + \mu a y_n = a(\lambda x_n + \mu y_n) + \lambda(1-a) \\ & = & a(\lambda x_n + \mu y_n) + b_u = au_n + b_u = u_{n+1}. \end{array}$$

La propriété est donc vraie pour tout n.

5.c) Donc, $\forall u \in E_a^{(0)},\ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ u = \lambda x + \mu y$.
$\boxed{\text{La famille } (x, y) \text{ est donc une famille génératrice de } E_a^{(0)}.}$

6. Or on a vu au 4. que cette famille est libre. On en conclut que la famille (x, y) est une base de $E_a^{(0)}$, et que $E_a^{(0)}$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Partie II

1. Supposons que le polynôme P n'est pas unique.
Ainsi $\exists (P,Q) \in \mathbb{R}_p[X]^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} & = au_n + P(n) \\ & = au_n + Q(n) \end{cases}$ Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = Q(n)$, c'est à dire, $\forall n \in \mathbb{N},\ (P-Q)(n) = 0$.
Le polynôme $P-Q$ de $\mathbb{R}_p[X]$ admet une infinité de racines (tous les entiers naturels). C'est donc le polynôme nul, d'où $P = Q$.

2. $\forall (u,v) \in (E_a^p)^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(\lambda u + \mu v)_{n+1} &= \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda(au_n + P_u(n)) + \mu(av_n + P_v(n)) \\ &= a(\lambda u_n + \mu v_n) + (\lambda P_u(n) + \mu P_v(n)) = a(\lambda u + \mu v)_n + (\lambda P_u + \mu P_v)(n).\end{aligned}$$

$\lambda P_u + \mu P_v \in \mathbb{R}_p[X]$, donc $\lambda u + \mu v \in E_a^{(p)}$ avec $P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v$.
$\boxed{E_a^{(p)} \text{ est donc un sous espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$

3. On vient de voir que $P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v$ ce qui s'écrit : $\theta(\lambda u + \mu v) = \lambda\theta(u) + \mu\theta(v)$
θ est donc une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

4. $u \in \ker(\theta) \iff \theta(u) = 0 \iff P_u = 0$.
Donc $u \in \ker(\theta) \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n$.
$\boxed{\ker(\theta) \text{ est donc l'ensemble des suites géométriques de raison } a}$.
Remarquons que la suite (y) du I.4. est non nulle, appartient à $\ker(\theta)$ et est génératrice de $\ker(\theta)$ car toute suite géométrique u de raison a est telle que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda a^n$. Donc $\ker(\theta)$ est le sous-espace vectoriel de $E_a^{(p)}$ engendré par (y), d'où $dim(\ker(\theta)) = 1$.

5. **5.a)** Le coefficient de X^k dans Q_k est égal à $1-a$ avec $a \neq 1$. Il est donc non nul, d'où $\deg(Q_k) = k$.

5.b) Les polynômes Q_0, Q_1, .., Q_p sont des polynômes non nuls de degrés distincts 2 à 2. Ils forment donc une famille libre de $\mathbb{R}_p[X]$.
Or $\dim(\mathbb{R}_p[X]) = p+1$ et la famille libre $(Q_0, Q_1, ..., Q_p)$ de $\mathbb{R}_p[X]$ a $p+1$ éléments. On en conclut que $(Q_0, Q_1, ..., Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$

6. **6.a)** Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^k$.
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, au_n + Q_k(n) = a.n^k + (n+1)^k - a.n^k = (n+1)^k = u_{n+1}$.
Donc $u \in E_a^{(p)}$ et $\theta(u) = Q_k$, d'où $Q_k \in \mathrm{Im}(\theta)$.

6.b) L'application linéaire θ est donc surjective, i.e. $\mathrm{Im}(\theta) = \mathbb{R}_p[X]$, et donc $dim(\mathrm{Im}(\theta)) = p+1$.

7. on a vu au II.4. que $\ker(\theta)$ est de dimension 1, et on a vu au II.6. que $\mathrm{Im}(\theta)$ est de dimension $p+1$.
L'image et la noyau de θ étant de dimension finie, on déduit que $E_a^{(p)}$ est de dimension finie, et par applation du théorème du rang :
$dim(E_a^{(p)}) = dim(\ker(\theta)) + dim(\mathrm{Im}(\theta)) = p+2$.
(Rappel ? ? : montrons que $E_a^{(p)}$ est de dimension finie.
Notons $v^{(i)}$ un antécédent de Q_i par θ.
Soit $u \in E_a^p$, alors $\exists \lambda_0, .., \lambda_p \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que $\theta(u) = \lambda_0 Q_0 + .. + \lambda_p Q_p = \theta(\lambda_0 v^{(0)} + ... + \lambda_p v^{(p)})$. Donc $\theta(u - \lambda_0 v^{(0)} - ... - \lambda_p v^{(p)}) = 0$, i.e. $u - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v^{(i)} \in \ker(\theta)$. Donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha y + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v^{(i)}$.
Donc $(y, \lambda_v^{(0)}, ...\lambda_p v^{(p)})$ est une famille génératrice finie de E_a^p, c'est à dire $E_a^{(p)}$ est de dimension finie.)

8. La famille $(x^{(0)}, ..., x^{(p)}, y)$ a $p+2$ éléments dans $E_a^{(p)}$ espace vecoriel de dimension $p+2$. Pour montrer que c'est une base, il suffit donc de montrer que c'est une famille de $E_a^{(p)}$ et qu'elle est libre.

✏ On a montré au 6.a. que pour tout k, $x^{(k)}$ est élément de E_a^p.

✏ Cette famille est libre. en effet :

$$\begin{aligned}\alpha y+\sum_{i=0}^{n}\lambda_i x^{(i)}=0 &\iff \forall n\in\mathbb{N},\ \lambda_0 n^0+\lambda_1 n^1+...+\lambda_p n^p+\alpha a^n=0\\ &\iff \forall n\in\mathbb{N}, \lambda_0+\lambda_1 n+...+\lambda_p n^p+\alpha a^n=0\\ &\iff \forall n\in\mathbb{N},\ \lambda_0 a^{-n}+\lambda_1 n a^{-n}+...+\lambda_p n^p a^{-n}+\alpha=0\end{aligned}$$

Or, $\forall k\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^k a^{-n}=0$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda_0 a^{-n}+\lambda_1 n a^{-n}+...+\lambda_p n^p a^{-n}+\alpha)=0\Longrightarrow\alpha=0$.
Donc $\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_i x^{(i)}=0$.

Soit R le polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$ défini par $R=\sum\limits_{i=0}^{p}\lambda_i X^i$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}, R(n)=0$, donc R a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Donc tous ses coefficients sont nuls, c'est à dire : $\forall i, \lambda_i=0$. Ainsi la famille $(x^{(0)},...,x^{(p)},y)$ est libre ; c'est donc une base de $E_a^{(p)}$.

9. $u\in E_2^{(1)}$ avec $P_u=-2X+7$.
Donc $\exists\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha+\beta n+\gamma 2^n$. Il nous faut donc trouver les coefficients α,β,γ.

$$\begin{cases}u_0=-2\\ u_1=3\\ u_2=11\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha+\gamma=-2\\ \alpha+\beta+2\gamma=3\\ \alpha+2\beta+4\gamma=11\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha+\gamma=-2\\ \beta+\gamma=5\\ 2\beta+3\gamma=13\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha=-5\\ \beta=2\\ \gamma=3\end{cases}$$

Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=-5+2n+3.2^n}$.

Partie III

1. ✏ Les résultats des questions II.1., II.2., II.3. restent valables, car on n'avait pas utilisé l'hypothèse $a\neq 1$.

✏ $u\in\ker(\theta)\iff\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=0$ i.e. $\ker(\theta)$ est l'espace vectoriel des suites constantes, c'est à dire l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par la suite (x) définie au I.4.

✏ En reprenant la définition de Q_k, alors $Q_0=0$ et pour $k\geqslant 1, \deg(Q_k)=k-1$.
On démontre alors de la même manière que $(Q_1,Q_2,...,Q_{p+1})$ est une base de$\mathbb{R}_p[X]$.

✏ Pour $k\in\{1,2,...,p+1\}$, $Q_k=\theta(x^{(k)})$ (même démonstration qu'au II.6.a.)
Donc là encore $\text{Im}(\theta)=\mathbb{R}_p[X]$ et donc $dim(E_1^{(p)})=p+2$.

✏ $(x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(p+1)},x)$ est une base de $E_1^{(p)}$ (c'est clairement une famille libre de $p+2$ éléments)
Donc $\forall u\in E_1^{(p)},\ \exists(\lambda_1,...,\lambda_{p+1},\alpha),\ \forall n\in\mathbb{N}, u_n=\alpha+\lambda_1 n+\lambda_2 n^2+...\lambda_{p+1}n^{p+1}$.

2. $u\in E_1^{(1)}$ avec $P_u=-6X+1$.
Donc $\exists\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha+\beta n+\gamma n^2$. Il nous faut donc trouver les coefficients α,β,γ.

$$\begin{cases}u_0=-2\\ u_1=-1\\ u_2=-6\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha=-2\\ \alpha+\beta+2\gamma=-1\\ \alpha+2\beta+4\gamma=-6\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta+\gamma=1\\ 2\beta+4\gamma=-4\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=4\\ \gamma=-3\end{cases}$$

Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=-2+4n-3n^2}$.

PROBLEME 2

Partie I

1. L'équation (E_x) s'écrit $\displaystyle\int_x^y e^t dt = 1$.

Or $\displaystyle\int_x^y e^t dt = 1 \iff e^y - e^x = 1 \iff e^y = 1 + e^x \iff y = \ln(1 + e^x)$ car $1 + e^x > 0$.

Donc $\boxed{f : x \to \ln(1 + e^x)}$.

2. ✏ $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x} > 0$.
Donc f croît strictement sur $\mathbb{R}$.

✏ Quand x tend vers $-\infty$, alors e^x tend vers 0. Donc $\lim\limits_{-\infty} f = \ln(1) = 0$.

✏ Quand x tend vers $+\infty$, alors e^x tend vers $+\infty$. donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1 + e^x) = \ln(e^x(e^{-x} + 1)) = x + \ln(1 + e^{-x})$
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$. La droite $\mathcal{D}$ est donc asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
De plus, $1 + e^{-x} > 1 \Longrightarrow \ln(1 + e^{-x}) > 0$. Donc $\mathcal{C}$ est AU-DESSUS de $\mathcal{D}$ pour tout réel x.

4.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(1 + (1 + x + \frac{x^2}{2} + o_0(x^2))\right) = \ln\left(2 + x + \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)\right) \\ &= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o_0(x^2)\right) = \ln(2) + \left((\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}) - \frac{1}{2}(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4})^2\right) + o_0(x^2) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f(x) = \ln(2) + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} + o_0(x^2)}$.

On en déduit que la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + \ln(2)$ est tangente à $\mathcal{C}$. De plus, $\dfrac{x^2}{8}$ est positif, et donc $\mathcal{C}$ est AU DESSUS de la tangente au voisinage de 0.

5.

Partie II

1. 1.a) $\displaystyle\int_x^y \varphi(t)dt = \int_x^y \frac{dt}{\pi(1 + t^2)} = \frac{1}{\pi}(\arctan(y) - \arctan(x))$. Or $\forall x,\ \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Donc $\displaystyle\int_x^y \frac{dt}{\pi(1 + t^2)} < \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\right)$.

Donc $\displaystyle\int_x^y \varphi(t)dt < 1$.

1.b) Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, il n'existe pas de réel y tel que $\displaystyle\int_x^y \varphi(t)dt = 1$.

1.c) $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$.

2. y solution de $(E_x) \iff \Phi_x(y) = 1$

3. 3.a) φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc Φ_x est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R},\ \Phi'_x(u) = \varphi(u)$. Or φ est strictement positive sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Donc Φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que Φ_x admet une limite, finie ou infinie, en $+\infty$.

3.b) ✏ 1er cas : $\ell = +\infty$. Alors, écrivons la défnition de $\lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$,

$\forall A > 0, \exists t_0 \in \mathbb{R}, \forall t, t \geqslant t_0 \Longrightarrow \varphi(t) \geqslant A$.
Donc dans ce cas, A et t_0 existent.

✏ 2^{nd} cas : $\ell \in \mathbb{R}$. On sait que φ est positive sur $\mathbb{R}$, donc $\ell \geqslant 0$. Or par hypothèse $\ell \neq 0$ donc $\ell > 0$.
Prenons, par exemple $\varepsilon = \ell/2$ dans la définition de $\lim\limits_{+\infty} \varphi = \ell$.
$\exists t_0 \in \mathbb{R},\ \forall t,\ t \geqslant t_0 \Longrightarrow \ell - \dfrac{\ell}{2} \leqslant \varphi(t) \leqslant \ell + \dfrac{\ell}{2}$.
Il suffit alors de prendre $A = \dfrac{\ell}{2}$.

Dans tous les cas, $\exists A > 0,\ \exists t_0 \in \mathbb{R},\ \forall t,\ t \geqslant t_0 \Longrightarrow \varphi(t) \geqslant A$.

3.c) On peut supposer $t_0 > x$. Prenons $u \geqslant t_0$.
Alors $\Phi_x(u) = \displaystyle\int_x^u \varphi(t)dt \geqslant \int_{t_0}^u \varphi(t)dt \geqslant A(u - t_0)$.
Donc pour avoir $\Phi_x(u) > 1$ il suffit que $A(u - t_0) > 1$ c'est à dire $u > \dfrac{1}{A} + t_0 > x$.
Ainsi, il existe $u \geqslant x$ tel que $\Phi x(u) > 1$.

3.d) $\Phi_x(x) = \displaystyle\int_x^x \varphi(t)dt = 0$.
On a vu au II.3.a. que Φ_x est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur son image.
Or $0 = \Phi_x(x)$, donc 0 est dans l'image de Φ_x ;
De plus $\Phi_x(u)$ est dans l'image de de Φ_x ;
Enfin, Φ_x étant continue, alors son image est un intervalle de $\mathbb{R}$. Cet intervalle contient 0 et $\Phi_x(u)$ réel strictement supérieur à 1, il contient donc 1.
Φ_x étant bijective sur $\mathbb{R}$, et 1 étant dans son image, on en déduit que 1 admet un et un seul antécédent par Φ_x, c'est à dire que l'équation (E_x) admet une et une seule solution.

Partie III

1. On a donc $\Phi_x(f(x)) = 1$.
Or $\Phi_x(u) = \displaystyle\int_x^u \varphi(t)dt = \int_x^0 \varphi(t)dt + \int_0^u \varphi(t)dt = -\int_0^x \varphi(t)dt + \Phi_0(u) = -\Phi_0(x) + \Phi_0(u)$. Donc

$$\Phi_x(f(x)) = 1 \Longleftrightarrow -\Phi_0(x) + \Phi_0(f(x)) = 1 \Longleftrightarrow \Phi_0(f(x)) = 1 + \Phi_0(x) \Longleftrightarrow f(x) = \Phi_0^{-1}(1 + \Phi_0(x))$$

car Φ_0 est bijective sur $\mathbb{R}$.

2. Φ_0 est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (II.3.a.) et bijective sur $\mathbb{R}$, donc Φ_0^{-1} est continue sur $\operatorname{Im}(\Phi_0)$ et de même monotonie que Φ_0. $1 + \Phi_0$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions croissantes), donc f, composée de fonctions continues et strictement croissantes, est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. 3.a) φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est positive entraîne $\varphi > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $\Phi_0' = \varphi \neq 0$.
Par application du théorème de dérivation des fonctions réciproques :
Φ_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_0'(x) \neq 0 \Longrightarrow \Phi_0^{-1}$ de classe C^1 sur $\Phi_0(\mathbb{R})$ et $(\Phi_0^{-1})' = \dfrac{1}{\Phi_0' \circ \Phi_0^{-1}}$.
Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe C^1 et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (\Phi_0^{-1})'(\Phi_0(x) + 1) \times \Phi_0'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(\Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1))} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}\ .$$

3.b) Notons V le voisinage de $f(x_0)$ mentionné dans l'hypothèse. f étant continue sur $\mathbb{R}$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(U) \subset V$.
Alors par application du théorème de dérivaition des fonctions réciproques,

$$\forall x \in U,\ x \neq x_0 \Longrightarrow f \text{ dérivable en } x_0 \text{ et } f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}$$

$\lim\limits_{x_0} \varphi = \varphi(x_0) > 0$ et $\lim\limits_{x_0} \varphi(f(x)) = 0$ avec $\forall x \in U,\ \varphi(f(u)) \geqslant 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x_0} f' = +\infty$.
Donc f n'est pas dérivable en x_0, mais sa courbe représentative admet une tangente verticale en x_0.

4. 4.a) Prenons $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$ dans la définition de $\lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$.
Alors $\exists a > 0,\ \forall t,\ t \geqslant a \Longrightarrow \varphi(t) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.

4.b) Remarquons tout d'abord que $1 + \Phi_0(x) > \Phi_0(x) \Longrightarrow f(x) > \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x)) \Longrightarrow f(x) \geqslant x$.
Alors $x \geqslant a \Longrightarrow f(x) \geqslant a$ d'où $\displaystyle\int_x^{f(x)} \varphi(t)dt \geqslant \int_x^{f(x)} \frac{1}{\varepsilon} dt \geqslant \frac{f(x) - x}{\varepsilon}$.
Donc $1 \geqslant \dfrac{f(x) - x}{\varepsilon}$, c'est à dire $f(x) - x \leqslant \varepsilon$ avec $f(x) - x \geqslant 0$. Donc $|f(x) - x| \leqslant \varepsilon$.
On en conclut $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ et donc la courbe de f admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

5. $\lim\limits_{+\infty} \varphi = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists a > 0,\ \forall t,\ t \geqslant a \Longrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant \varphi(t) \leqslant \ell + \varepsilon$.
Alors pour $u \geqslant x \geqslant a$, $(\ell - \varepsilon)(u - x) \leqslant \displaystyle\int_x^u \varphi(t)dt \leqslant (\ell + \varepsilon)(u - x)$.
D'où $u \geqslant x \geqslant a \Longrightarrow (\ell - \varepsilon)(u - x) \leqslant \Phi_x(u) \leqslant (\ell + \varepsilon)(u - x)$.
Alors, pour $x \geqslant a$, sachant que $f(x) \geqslant x$ on déduit :
$(\ell - \varepsilon)(f(x) - x) \leqslant \Phi_x(f(x)) \leqslant (\ell + \varepsilon)(f(x) - x)$, avec $\Phi_x(f(x)) = 1$ par définition de f.
Donc $\dfrac{1}{\ell + \varepsilon} \leqslant f(x) - x \leqslant \dfrac{1}{\ell - \varepsilon}$.
On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \dfrac{1}{\ell}}$.

6. 6.a) $(x, y) \in \Gamma \Longleftrightarrow \Phi_x(y) = 1 \Longleftrightarrow \displaystyle\int_x^y \varphi(t)dt = 1$. Posons $u = -t$. Alors

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Gamma \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_{-x}^{-y} \varphi(-u)(-du) = 1 \Longleftrightarrow -\int_{-x}^{-y} \varphi(u)du = 1 \Longleftrightarrow \int_{-y}^{-x} \varphi(u)du = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \Phi_{-y}(-x) = 1 \Longleftrightarrow (-y, -x) \in \Gamma\ . \end{aligned}$$

6.b) Ainsi, $(x, y) \in \Gamma \iff (-y, -x) \in \Gamma$, et donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y + x = 0 \text{ est axe de symétrie de }}$

Partie IV

1. $\varphi(x) = (x^2 - 1)^2$, donc φ est continue sur $\mathbb{R}$, et strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf en -1 et 1.
φ vérifie donc les hypothèses du problème.
Remarquons, en outre, que $\ell = \lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$ et que φ est paire.

2.
- ✏ f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (III.3.a)
- ✏ La droite d'équation $y + x = 0$ est axe de symétrie de la courbe de f, car φ est paire (III.6.b.)
- ✏ La droite d'équation $y = x$ est asymptote à Γ (III.4.b.)
- ✏ La courbe admet des tangentes horizontales aux points d'abscisse 1 et -1.
  Posons $f(1) = y_0$ (on sait $y_0 > 1$ III.4.b.) et $f(-1) = x_0$ (d'où $x_0 > -1$.).
  Alors $f(-x_0) = 1$ et $f(-y_0) = -1$, qui sont les points de Γ à tangentes verticales (III.3.b.).
- ✏ On peut encore remarquer que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)dt = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{15} < 1$.
  Donc $f(0)$ qui vérifie $\displaystyle\int_0^{f(0)} \varphi(t)dt = 1$ est tel que $f(0) > 1$.
  Donc $f(-x_0) = 1 \Longrightarrow -x_0 < 0$ i.e.$x_0 > 0$, d'où $f(-1) > 0$.

✏ Avec Maple :

$> \; phi := x- > x^4 - 2 * x^2 + 1 :$

$> \; Phi := (x, y)- > int(phi(t), t = x..y) :$

$> \; f := x- > fsolve(Phi(x, y) = 1, y) :$

$> \; plot(f, -3..3);$