Devoir surveillé n° 06 (4 heures)

Ce devoir est constitué d'un seul problème.

Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.
La calculatrice est autorisée.

Problème : Suites de Cauchy, Espaces complets

Partie I : Suite de Cauchy

On considère dans cette partie, un espace vectoriel normé E muni de la norme $\| \ \|$.
Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \big| \ \forall (p,q) \in \mathbb{N}, p \geqslant n_0 \Longrightarrow \|x_{p+q} - x_p\| \leqslant \varepsilon$

1. Montrer qu'une suite de E convergente est nécessairement une suite de Cauchy.

2. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée

3. Montrer qu'une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente

4. Soit E et F sont deux espaces vectoriels normés. Montrer qu'une suite de $E \times F$ est de Cauchy si et seulement si ses composantes sont des suites de Cauchy.

Partie II : Parties complètes d'un espace vectoriel normé

Si A est une partie de E, on dit que A est *une partie complète de* E si toute suite de Cauchy d'éléments de A est convergente dans A.
On dit que E est complet (ou E est un espace de Banach) si toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente dans E.

5. Si N_1 et N_2 sont deux normes sur E équivalentes, montrer que toute partie complète dans (E, N_1) est complète dans (E, N_2)

6. Montrer qu'une partie complète d'un espace vectoriel normé est fermée.

7. Montrer qu'une partie fermée d'une partie complète est complète

8. Montrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est complète

9. Montrer que le produit de deux parties complètes est complet

Partie III : Exemples d'espaces de Banach, exemple d'espaces vectoriels normés non complets

10. En utilisant le fait qu'une suite de Cauchy est bornée, montrer que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel normé complet.

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace $\mathbb{K}^n$ est complet (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

12. On considère X un ensemble non vide quelconque et (E, N_E) un espace vectoriel normé complet. On considère $\mathscr{B}(X, E)$ l'espace des applications de X vers E bornées et on le munit de la norme N_∞ définie par $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in X} N_E(f(x))$.

Montrer que pour cette norme, $\mathscr{B}(X, E)$ est complet.

13. Montrer que si $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, l'espace $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$ est complet

14. Soit $E = \mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_1$ définie par $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(t)| \, dt$.

14.a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \min(nx, 1)$ et sur $[-1, 0]$ par $f_n(x) = 0$.
Tracer sur un même dessin les graphes de f_1, f_2 et f_3.
Montrer que f_n est dans E.

14.b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy pour $\| \ \|_\infty$ mais qu'il s'agit d'une suite de Cauchy pour la norme $\| \ \|_1$

14.c) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite convergente dans $\left(E, \| \ \|_1\right)$

14.d) Qu'en déduit-on ?

Partie IV : Théorème du point fixe dans un espace de Banach

On considère dans cette partie, que $\left(E, \|\ \|\right)$ est un espace de Banach.

Soit f une application de E dans lui-même. On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E par la donnée de a_0 et de la relation de récurrence de la forme $a_{n+1} = f(a_n)$.

15. On suppose dans cette question que f est continue. Montrer que, si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite ℓ vérifie nécessairement l'équation : $\ell = f(\ell)$

16. On suppose dans cette question que f est contractante i.e. il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tout couple (x_1, x_2) d'éléments de E distincts, $\dfrac{\|f(x_2) - f(x_1)\|}{\|x_2 - x_1\|} \leqslant k$

16.a) Montrer qu'une application contractante sur E est continue, et qu'elle est uniformément continue sur E tout entier.

16.b) Montrer que l'équation $x = f(x)$ ne peut admettre plus d'une racine dans E.

16.c) Montrer que, a_0 étant un élément quelconque de E, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E définie par la donnée de a_0 et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = f(a_n)$ est une suite de Cauchy.
En déduire que cette suite est convergente et que l'équation $x = f(x)$ admet une racine unique, limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cette limite ne dépendant pas de a_0.
L'ensemble des résultats de cette question 16. constitue le *théorème du point fixe* dans un espace vectoriel normé complet

Partie V : Théorème de Cauchy-Lipschitz

On considère f une application continue de $[a,b] \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$, lipschitzienne par rapport à la seconde variable i.e. il existe $L > 0$ tel que $\forall (t,x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\big\|f(t,x) - f(t,y)\big\| \leqslant L\big\|y - x\big\|$.
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (E)$$

où $t_0 \in [a,b]$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$ sont fixés et y est une fonction inconnue de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}^n$ dérivable.

17. Montrer que le système (E) est équivalent à l'équation d'inconnue y :

$$\forall t \in [a,b],\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\ du$$

18. Soit T l'application de $\mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ vers lui-même qui à $y \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ associe l'application T_y définie par : $\forall t \in [a,b],\ T_y(t) = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\ du$. La résolution du problème de Cauchy (E) revient donc à la recherche d'un point fixe pour l'application T.

18.a) Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\|\ \|_\alpha$ définie sur $\mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ par $\big\|y\big\|_\alpha = \max\limits_{t\in[a,b]} \left(e^{-\alpha|t-t_0|}\big\|y(t)\big\|\right)$ est une norme sur $\mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ et qu'elle est équivalente à la norme infinie sur cet espace.
On en déduit que l'espace $\mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ est un espace complet pour cette norme

18.b) Montrer que pour tout couple (y,z) de $\mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ on a :

$$\forall t \in [a,b], \quad \|T_y(t) - T_z(t)\| \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} e^{\alpha|t-u|} du \right| \ \big\|y - z\big\|_\alpha$$

18.c) En déduire que l'on peut choisir α pour que T soit contractante

19. En déduire l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy (E)

PROBLEME : Suites de Cauchy, Espaces complets

Partie I Suite de Cauchy

dans $(E, \| \|)$ evn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ssi : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq n_0 \Rightarrow \|x_{q+p} - x_p\| \leq \varepsilon$

1) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. Soit ℓ sa limite.

Soit $\varepsilon > 0$ Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Soit alors $(p,q) \in \mathbb{N}^2 / p \geq n_0$. On a $\|x_p - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|x_{p+q} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ donc $\|x_{p+q} - x_p\| \leq \varepsilon$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy

Ainsi <u>Une suite convergente est une suite de Cauchy</u>

2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

On prend $\varepsilon = 1$. On a l'existence de $n_0 \in \mathbb{N} / \forall p \in \mathbb{N}, p \geq n_0 \Rightarrow \|x_p - x_{n_0}\| \leq 1$

Ainsi $\forall p \geq n_0, \quad \|x_p\| \leq 1 + \|x_{n_0}\|$

On pose $M = \max(\|x_0\|, \|x_1\|, \dots, \|x_{n_0}\|, 1 + \|x_{n_0}\|)$

On a $M \in \mathbb{R}_+^*$ et <u>$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée</u>

3) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence. Soit λ cette valeur d'adhérence et φ une extractrice associée.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \left.\begin{matrix} p \geq n_0 \\ q \geq n_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

. Il existe $n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow \|x_{\varphi(n)} - \lambda\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Soit alors $n_2 = \max(n_0, \varphi(n_1))$. On a $\varphi(n_2) \geq n_2$

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow \|x_n - \lambda\| \leq \|x_n - x_{\varphi(n_2)}\| + \|x_{\varphi(n_2)} - \lambda\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Ainsi <u>$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ.</u>

Donc <u>Une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente</u>

4) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

($\Rightarrow$) <u>Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de Cauchy</u>

Soit $\varepsilon > 0$. il existe $n_1 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq n_1 \Rightarrow \|a_{p+q} - a_p\|_E \leq \varepsilon$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq n_2 \Rightarrow \|b_{p+q} - b_p\|_F \leq \varepsilon$

On pose $n_0 = \max(n_1, n_2)$. On a $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq n_0 \Rightarrow \|U_{p+q} - U_p\|_{E\times F} = \max(\|a_{p+q} - a_p\|_E, \|b_{p+q} - b_p\|_F) \leq \varepsilon$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>est une suite de Cauchy</u>

($\Leftarrow$) <u>Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy</u>

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N} / \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq n_0 \Rightarrow \|U_{p+q} - U_p\|_{E\times F} \leq \varepsilon$

On a alors $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq n_0 \Rightarrow \begin{cases} \|a_{p+q} - a_p\|_E \leq \|U_{p+q} - U_p\|_{E\times F} \leq \varepsilon \\ \|b_{p+q} - b_p\|_F \leq \|U_{p+q} - U_p\|_{E\times F} \leq \varepsilon \end{cases}$

Donc <u>$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy</u>

Partie II Parties complètes d'un espace vectoriel normé

5) Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes de E. Soit $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2 / \alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$

Soit A une partie complète de E pour la norme N_1. Montrons qu'elle est complète dans (E,N_2)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ suite de Cauchy pour (E,N_2). Montrons qu'elle est de Cauchy pour (E,N_1).

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $n_0\in\mathbb{N} / \forall (p,q)\in\mathbb{N}^2,\ p\geq n_0 \Rightarrow N_2(u_{p+q}-u_p)\leq \alpha\varepsilon$

On a alors $\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2,\ p\geq n_0 \Rightarrow N_1(u_{p+q}-u_p)\leq \frac{1}{\alpha}N_2(u_{p+q}-u_p)\leq\varepsilon$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour (E,N_1) dans A qui est complète dans (E,N_1)

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (E,N_1) vers un certain $\ell\in A$

On a alors $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq N_2(u_n-\ell)\leq\beta N_1(u_n-\ell)$ avec $N_1(u_n-\ell)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $(N_2(u_n-\ell))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (E,N_2) vers $\ell\in A$

Ainsi : A est une partie complète de (E,N_2)

6) Si A complète

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge. Soit $\ell\in E$ limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E elle est de Cauchy dans E. Or A est complète

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans A donc $\ell\in A$:

Ainsi : par caractérisation séquentielle des fermés, A est une partie fermée de E

7) Soit A une partie complète de E. B une partie fermée de A.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in B^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. Comme $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in A$ et A complète, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans A

Soit ℓ sa limite.

Comme $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in B$ et B fermé on a $\ell\in B$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans B

Ainsi : B est complète

8) Soit K un compact de E.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K de Cauchy. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in K^{\mathbb{N}}$ avec K compact donc elle possède une valeur d'adhérence ℓ dans K. Mais une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence est convergente (I.3). Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in K$: K complet

Donc une partie compacte d'un espace vectoriel normé est complète

9) Soit A une partie complète de E, B une partie complète de F.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $A\times B$. On note $u_n=(a_n,b_n)$ $a_n\in A$ et $b_n\in B$

D'après I4, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy

Or A et B sont complètes donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV dans A (vers a) et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV dans B (vers b)

Mais alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(a,b)\in A\times B$

Partie III Exemples d'espaces de Banach

10) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de Cauchy. Elle est donc bornée

Or d'après BW, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède donc une valeur d'adhérence. Comme il s'agit d'une suite de Cauchy, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Ainsi $\mathbb{R}$ est complet : il s'agit d'un espace de Banach

11) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Le théorème de Bolzano Weierstrass s'appliquant également sur $\mathbb{K}^n$, l'argumentation de la question précédente est encore valable

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets

12) $X\neq\emptyset$, (E,N_E) normé complet. $\mathcal{B}(X,E)=\{f\in\mathcal{F}(X,E)\mid f \text{ bornée}\}$. $N_\infty(f)=\sup_{x\in X} N_E(f(x))$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{B}(X,E)$. On a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée donc il existe

$M>0$ / $\forall n\in\mathbb{N}$, $N_\infty(f_n)\leq M$.

Soit $x\in X$ $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $N_E(f_{p+q}(x)-f_p(x))\leq N_\infty(f_{p+q}-f_p)$

Ainsi $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E. Or E complet

donc il existe $f(x)\in E$ tel que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$

En passant à la limite dans la relation $\forall n\in\mathbb{N}$, $N_E(f_n(x))\leq M$ on a $N_E(f(x))\leq M$

(N_E continue)

Ainsi l'application $f: \begin{array}{l} X\to E \\ x\mapsto f(x)\end{array}$ est bornée : $f\in\mathcal{B}(X,E)$

Soit $\varepsilon>0$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{B}(X,E)$ donc il existe $n_0\in\mathbb{N}\mid\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2$,

$p\geq n_0\Rightarrow N_\infty(f_{p+q}-f_p)\leq\varepsilon$

Soit $n\in\mathbb{N}/n\geq n_0$. Soit $x\in X$.

On a $\forall q\in\mathbb{N}$, $N_E(f_{n+q}(x)-f_n(x))\leq N_\infty(f_{n+q}-f_n)\leq\varepsilon$

Ainsi, en passant à la limite lorsque $q\to+\infty$ on a $N_E(f(x)-f_n(x))\leq\varepsilon$

Ceci étant vrai pour tout $x\in X$, on a :

$N_\infty(f_n-f)\leq\varepsilon$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $(\mathcal{B}(X,E),N_\infty)$: $(\mathcal{B}(X,E),N_\infty)$ est complet

13) $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est une partie de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ qui est complet pour $\|\ \|_\infty$

D'après II 7, il suffit de montrer $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ fermé pour avoir $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ complet.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ convergente dans $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. Soit f sa limite.

Soit $\varepsilon>0$ Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}),\|\ \|_\infty)$, il existe $n_0\in\mathbb{N}\mid\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0\Rightarrow\|f_n-f\|_\infty\leq\frac{\varepsilon}{3}$

f_{n_0} est continue sur $[a,b]$ donc uniformément continue. Donc il existe $\delta>0$ / $\forall(x,y)\in[a,b]^2$,

$|x-y|\leq\delta\Rightarrow|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|\leq\varepsilon/3$

On a alors $\forall(x,y)\in[a,b]^2$, $|x-y|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)|+|f_{n_0}(y)-f(y)|\leq\varepsilon$

Ainsi f est uniformément continue sur $[a,b]$ et donc continue

Donc $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est une partie fermée de $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}),\|\ \|_\infty)$ qui est complet donc

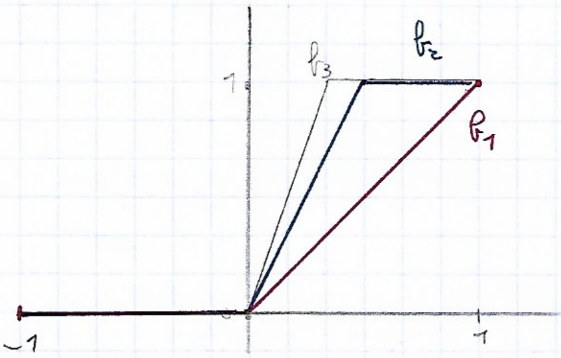
$(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach

14) $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ $\qquad \|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt$

14)a) soit $n\in\mathbb{N}^*$

$f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases}\min(nx,1) & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$



On a $\forall x\in[0,1]$, $f_n(x) = \dfrac{1+nx-|nx-1|}{2}$

Donc f_n est continue sur $[0,1]$

14b) * Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ Soit $n_0\in\mathbb{N}^*$. Soit $p=q=n_0$ On a $f_{n_0}\left(\frac{1}{2n_0}\right) = \frac{1}{2}$ et $f_{2n_0}\left(\frac{1}{2n_0}\right) = 1$

Donc $\|f_{p+q} - f_p\| \geq \frac{1}{2}$: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy dans $(E, \|\ \|_\infty)$

* Soit $\varepsilon>0$. Soit $n_0 = 1 + \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon}\right\rfloor$

Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ / $p\geq n_0$. On a $N_1(f_{p+q} - f_p) = \int_{-1}^{1} |f_{p+q}(t) - f_p(t)|\,dt \leq \int_0^{1/p} f_{p+q}(t)\,dt$

car $\forall t\in[-1,1]$, $0\leq f_p(t) \leq f_{p+q}(t)\leq 1$ et $\int_0^{1/p}(1-f_p) = \int_0^{1/p} f_p$

Or $\int_0^{1/p} f_{p+q}(t)\,dt = \dfrac{1}{2p} \leq \dfrac{1}{2n_0} \leq \varepsilon$

Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $(E,\|\ \|_1)$

14c) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeait vers f dans $(E,\|\ \|_1)$

On aurait, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_{-1}^{0} |f_n - f|\,dt \leq N_1(f_n - f)$ donc $\int_{-1}^{0} |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Or $\int_{-1}^{0} |f_n(t) - f(t)|\,dt = \int_{-1}^{0} |f(t)|\,dt$ donc comme $|f|$ est continue positive,

On a $\forall t\in[-1,0]$ $f(t) = 0$

* Soit $\alpha\in]0,1[$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_\alpha^1 |f_n(t)-f(t)|\,dt \leq \|f_n - f\|_1$ donc $\int_\alpha^1 |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Or pour $n\geq \frac{1}{\alpha}$, $\int_\alpha^1 |f_n(t) - f(t)|\,dt = \int_\alpha^1 |1-f(t)|\,dt$ donc comme $|1-f|$ continue positive, on a $\forall t\in[\alpha,1]$ $f(t)=1$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha\in]0,1[$, on a $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto \begin{cases}0 & \text{si } t\in[-1,0]\\ 1 & \text{si } t\in]0,1]\end{cases}$

Or cette fonction n'est pas continue

Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente dans $(E,\|\ \|_1)$

14)d) On a trouvé une suite de Cauchy de $(E,\|\ \|_1)$ qui n'est pas convergente

Ainsi $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|\ \|_1)$ n'est pas un espace de Banach

Rem On a établi également que le fait pour un espace d'être de Banach dépend de la norme : $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ est de Banach mais $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|\ \|_1)$ ne l'est pas

Partie IV Théorème du point fixe dans un espace de Banach

15 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ / $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$ avec f continue de E vers E.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit ℓ sa limite. En passant à la limite dans la relation de récurrence

On a par continuité de f et unicité de la limite : $f(\ell) = \ell$

16 Si f contractante de rapport $k<1$: $\forall (x,y)\in E^2$, $\|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\|$

a) Soit $\varepsilon>0$. Soit $\delta=\varepsilon$. On a $\forall (x,y)\in E^2$, $\|x-y\|\leq\delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leq k\delta \leq \delta = \varepsilon$

Donc f est uniformément continue sur E et donc f continue sur E

b) Supposons par l'absurde que f admette deux points fixes ℓ_1 et ℓ_2 distincts

On a $\|\ell_1-\ell_2\| = \|f(\ell_1)-f(\ell_2)\| \leq k\|\ell_1-\ell_2\| < \|\ell_1-\ell_2\|$ car $k<1$ et $\|\ell_1-\ell_2\|>0$

Contradiction.

Ainsi l'équation "$f(x)=x$" a au plus une solution.

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$ / $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Montrons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

On constate d'abord : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|a_{n+2}-a_{n+1}\| = \|f(a_{n+1})-f(a_n)\| \leq k\|a_{n+1}-a_n\|$

Ainsi $\forall (n,q)\in\mathbb{N}^2$, $\|a_{n+1}-a_n\| \leq k^n \|a_1-a_0\|$ et $\|a_{n+q}-a_n\| \leq k^n \sum_{j=0}^{q-1} k^j \|a_1-a_0\|$

$0<k\neq 1$ Donc $\forall (n,q)\in\mathbb{N}^2$, $\|a_{n+q}-a_n\| \leq k^n \dfrac{1-k^q}{1-k}\|a_1-a_0\| \leq \dfrac{k^n}{1-k}\|a_1-a_0\|$

Soit $\varepsilon>0$. Comme $\left(\dfrac{k^n}{1-k}\|a_1-a_0\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (car $k\in[0,1[$), il existe $n_0\in\mathbb{N}$

tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0 \Rightarrow \dfrac{k^n}{1-k}\|a_1-a_0\| \leq \varepsilon$

On a alors $\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2$, $p\geq n_0 \Rightarrow \|a_{p+q}-a_p\| \leq \varepsilon$

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Or E est un espace complet donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente

Partie V Théorème de Cauchy-Lipschitz

$f : [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue /

$\exists L>0 \mid \forall (t,x,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\ \|f(t,x)-f(t,y)\|\leq L\|y-x\|$

$(E)\ \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$ $t_0\in[a,b]$, $y_0\in\mathbb{R}^n$ y dérivable de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}^n$

17) $\int_{t_0}^{t} y'(u)\,du = y(t)-y(t_0)$ donc $y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t} y'(u)\,du$

Ainsi y sol de $(E) \iff \forall t\in[a,b],\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u,y(u))\,du$

18) Soit $T : \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n)$

$y \longmapsto T_y : [a,b]\to\mathbb{R}^n$, $t\longmapsto y_0+\int_{t_0}^{t} f(u,y(u))\,du$

remarquons que si y continue T_y l'est aussi

18a) Si $\alpha>0$. On a $\forall t\in[a,b]$, $e^{-\alpha(b-a)}\|y(t)\| \leq e^{-\alpha|t-t_0|}\cdot\|y(t)\| \leq \|y(t)\|$

Ainsi par passages successifs à la borne sup on a

$e^{-\alpha(b-a)}\|y\|_\infty \leq \|y\|_\alpha \leq \|y\|_\infty$: $\|\ \|_\alpha$ est équivalente à $\|\ \|_\infty$

18b) Soit $(y,z)\in\left(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n)\right)^2$.

$\forall t\in[a,b]$, $\|T_y(t)-T_z(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t}\left(f(u,y(u))-f(u,z(u))\right)du\right\|$

$\leq \left|\int_{t_0}^{t}\|f(u,y(u))-f(u,z(u))\|\,du\right| \leq L\left|\int_{t_0}^{t}\|y(u)-z(u)\|\,du\right|$

Donc pour $t\geq t_0$, $e^{-\alpha(t-t_0)}\|T_y(t)-T_z(t)\| \leq L\,e^{-\alpha(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}\|y(u)-z(u)\|\,du$

$\leq L\,e^{-\alpha(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{\alpha(u-t_0)}\left(e^{-\alpha(u-t_0)}\|y(u)-z(u)\|\right)du$

Donc $\forall t\geq t_0$, $e^{-\alpha(t-t_0)}\|T_y(t)-T_z(t)\| \leq L\,e^{-\alpha(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{\alpha(u-t_0)}\|y-z\|_\alpha\,du$

ie $\forall t\geq t_0$ $e^{-\alpha(t-t_0)}\|T_y(t)-T_z(t)\| \leq L\,e^{-\alpha(t-t_0)}\|y-z\|_\alpha\int_{t_0}^{t} e^{\alpha(u-t_0)}\,du$

Or $\int_{t_0}^{t} e^{\alpha(u-t_0)}\,du = \left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha(u-t_0)}\right]_{t_0}^{t} = \frac{e^{\alpha(t-t_0)}-1}{\alpha}$

Ainsi $\forall t\geq t_0$, $e^{-\alpha(t-t_0)}\|T_y(t)-T_z(t)\| \leq \frac{L}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(t-t_0)}\right)\|y-z\|_\alpha$

De même pour $t\leq t_0$, $e^{-\alpha|t-t_0|}\|T_y(t)-T_z(t)\| \leq \frac{L}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha|t-t_0|}\right)\|y-z\|_\alpha$

Ainsi en passant à la borne sup, $\|T_y-T_z\|_\alpha \leq \frac{L}{\alpha}\|y-z\|_\alpha$

18c) On choisit alors α tel que $\frac{L}{\alpha}<1$: par exemple $\alpha=2L$

On obtient alors T contractante dans $\left(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n),\|\ \|_\alpha\right)$

19) Comme $\left(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n),\|\ \|_\alpha\right)$ est un espace de Banach et que T est contractante

On a d'après le th du point fixe que T possède un unique point fixe

Donc $\exists!\, y\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n) \mid T(y)=y$

Cette solution y étant alors dérivable on a donc

$\exists!\, y\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n) \mid \begin{cases} y(t_0)=y_0 \\ \forall t\in[a,b],\ y'(t)=f(t,y(t)) \end{cases}$