

GÉNÉRALITÉS SUR LES ENSEMBLES ET LES APPLICATIONS

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \mapsto F$ une application.

1. Montrer que, pour toutes parties A et B de E , on a :

$$(a) A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$$

$$(b) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$(c) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

2. Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E , montrer que

$$(a) f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

$$(b) f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

3. Montrer que, pour toutes parties A' et B' de F , on a :

$$(a) A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$$

$$(c) f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$$

$$(b) f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$$

4. Plus généralement, si $(A'_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de F , montrer que

$$(a) f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A'_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A'_i)$$

$$(b) f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A'_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A'_i)$$

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles non vides. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

- Il existe une injection f de E vers F
- Il existe une surjection g de F vers E .

Exercice 3. Théorème de Cantor-Bernstein.

Soient E et F deux ensembles non vides. On suppose qu'il existe une injection f de E vers F et qu'il existe une injection g de F vers E

- Soit $X = \left\{ A \in \mathcal{P}(E) \mid g(F \setminus f(A)) \subset E \setminus A \right\}$. Montrer que $X \neq \emptyset$
- Montrer que $B = \bigcup_{A \in X} A$ est défini et que $B \in X$. B est alors le plus grand élément de X pour l'inclusion
- Montrer que $g(F \setminus f(B)) = E \setminus B$
- En déduire qu'il existe une bijection de E vers F

Exercice 4. Théorème de Cantor.

- Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$
- En considérant la partie $A = \left\{ x \in E \mid x \notin f(x) \right\}$, montrer qu'il n'existe pas de bijection f de E dans $\mathcal{P}(E)$

GROUPES

Exercice 5. On note G l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + ib$ où a et b sont des entiers relatifs.

- Montrer que $(G, +)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}, +)$.
- Montrer que $(G, +, \times)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ? Est-ce un corps ?
- Vérifier que : $\forall z \in \mathbb{C}, z \in G \implies |z|^2 \in \mathbb{N}$.
En déduire que z est un élément inversible dans G si et seulement si : $z \in G$ et $|z| = 1$.
- Montrer que l'ensemble $\hat{A}$ des éléments inversibles d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ est, muni de la loi $\times$, un groupe. Quel est ce groupe lorsque A est un corps ? Déterminer le groupe $\hat{G}$.

Exercice 6. Soit G un sous-groupe FINI du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$, non réduit au singleton $\{1\}$.

- Soit $z \in G$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, z^n \in G$. En déduire que $|z| = 1$.
 G est donc un sous-groupe du groupe des complexes de module 1.

2. Soit A l'ensemble des arguments dans $[0, 2\pi[$ des éléments de G .
 - (a) Montrer que $A \setminus \{0\}$ a un minimum θ .
 - (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, e^{in\theta} \in G$.
 - (c) En déduire que θ est de la forme $\frac{2\pi}{p}$ où p est un entier naturel non nul.
3. Montrer que G est le groupe des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

RELATIONS D'ORDRE et BORNES SUPÉRIEURES

Exercice 7. A et B sont des parties de $\mathbb{R}$, non vides et majorées. On pose $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$

1. Justifier l'existence des bornes supérieures de A , B et $A + B$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

Exercice 8. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui sont bornées, c'est à dire pour lesquelles l'ensemble $\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$ est majoré.

Soient f et g deux fonctions bornées, et μ un réel non nul.

1. Justifier l'existence de $S(f) = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$ et montrer que $S(f) = 0$ si et seulement si f est la fonction nulle.
2. Montrer que $S(f) + S(g)$ est un majorant de $\{|f(x) + g(x)|, x \in \mathbb{R}\}$.
En déduire que $f + g \in \mathcal{B}$ et que $S(f + g) \leq S(f) + S(g)$.
3. Montrer que $\mu f \in \mathcal{B}$ et que $S(\mu f) \leq |\mu|S(f)$. Montrer alors que $S(\mu f) = |\mu|S(f)$

Exercice 9. A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, on note S la borne supérieure de A .

1. Montrer que si $S \notin A$, on peut construire une suite strictement croissante $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers S .
2. Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, pour laquelle il n'existe pas de suite strictement croissante de points de A qui converge vers $S = \sup(A)$

Exercice 10. On définit dans $\mathbb{C}$ la relation $\preccurlyeq$ par :

$$\forall (a + ib, x + iy) \in \mathbb{C}^2, a + ib \preccurlyeq x + iy \Leftrightarrow [(a < x) \text{ ou } (a = x \text{ et } b \leq y)]$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{C}$, qui prolonge la relation $\leq$ de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(\mathbb{C}, +, \times, \preccurlyeq)$ n'est pas un corps ordonné.
3. Montrer qu'il n'existe aucune relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$ qui prolonge la relation $\leq$ et pour laquelle $\mathbb{C}$ devienne un corps ordonné.

Exercice 11. Soit $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 \leq 2\}$. L'objectif de l'exercice est de prouver que A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$ qui n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

1. Prouver que A est une partie non vide de $\mathbb{Q}$ et majorée dans $\mathbb{Q}$.
2. On suppose que A a une borne supérieure $S \in \mathbb{Q}$.

(a) Montrer que $S \geq 1$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in A \mid S - \frac{1}{n} < a_n \leq S$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(S - \frac{1}{n}\right)^2 \leq 2$ puis que $S^2 \leq 2$ (on a donc établi $S \in A$)

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, S + \frac{1}{n} \notin A$, en déduire que $S^2 \geq 2$. On a donc $S^2 = 2$.

(c) Conclure.

THEME D'ETUDE

Exercice 12. soit G un sous groupe du groupe $(\mathbb{R}, +)$, avec $G \neq \{0\}$.

1. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure que l'on notera α . Montrer que : $\alpha \geq 0$.
2. On suppose que l'on a $\alpha > 0$. Montrer qu'alors $G = \alpha\mathbb{Z}$. (Rappel : $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha k, k \in \mathbb{Z}\}$).
3. On suppose que l'on a $\alpha = 0$. Montrer qu'alors G est dense dans $\mathbb{R}$ i.e. entre deux réels x et y distincts quelconques, il existe au moins un élément de G . (Indication : Considérer $\varepsilon \in G$ tel que $0 < \varepsilon < \frac{|x - y|}{2}$ et montrer qu'il existe un multiple de ε entre x et y)
4. Exemple : soit $\omega \in \mathbb{R}$ et $G = \{a + b\omega, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
 - (a) Montrer que G est un sous groupe additif de $\mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que si ω est un rationnel avec $\omega = \frac{p}{q}$ où $\text{pgcd}(p, q) = 1$, alors $G = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.
 - (c) Que dire si ω n'est pas rationnel?