

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

Exercice 1. Montrer qu'une suite d'entiers relatifs qui est convergente converge vers un entier, puis qu'elle est stationnaire (c'est à dire constante à partir d'un certain rang).

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

1. Montrer que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un complexe L , la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge également vers L (c'est le théorème de Césaro).
2. Donner un exemple simple où la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge alors que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 3. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite minorée de réels. Montrer que : soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, soit on peut extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite convergente (on pourra commencer par en extraire une sous-suite bornée).

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. On suppose que les sous-suites $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers L_0 , L_1 , L_2 et M

1. En considérant la suite (u_{6n}) , montrer que $L_0 = M$. Montrer de même que $L_1 = M$ et $L_2 = M$.
2. Montrer alors que la suite (u_n) est convergente.

RELATIONS DE COMPARAISON

Exercice 5. Déterminer un équivalent puis la limite de :

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $a_n = \ln^2(n+1) - \ln^2(n)$ | 3. $c_n = \left(3 \times 2^{1/n} - 2 \times 3^{1/n}\right)^n$ | 5. $e_n = n \ln \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)$ |
| 2. $b_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ | 4. $d_n = \frac{n^{2a}}{a^n + \ln(n)} \quad (a \in \mathbb{R})$ | 6. $f_n = \frac{n^2 + \text{th}(n)}{\text{sh}(n) + \ln(n)}$ |

Exercice 6. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de réels strictement positifs avec $a_n \sim b_n$.

1. On suppose que ces deux suites convergent vers une limite $L \neq 1$ ou divergent vers $+\infty$, montrer que $\ln(a_n) \sim \ln(b_n)$.
2. Donner un exemple où les deux suites convergent vers 1 et où $\ln(a_n)$ et $\ln(b_n)$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 7. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de réels avec $a_n \sim b_n$.

1. Montrer que : $e^{a_n} \sim e^{b_n} \Leftrightarrow (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Donner un exemple de suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(ab_n)_{n \in \mathbb{N}}$ équivalentes, pour lesquelles e^{a_n} et e^{b_n} ne sont pas équivalentes.

SUITES RECURRENTES

Exercice 8. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$

1. Donner, dans un même tableau, les variations de $x \rightarrow \ln(1+x)$ et le signe de $x \rightarrow \ln(1+x) - x$ et en déduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et converge vers 0.
2. Déterminer un réel s tel que $a_{n+1}^s - a_n^s$ ait une limite finie non nulle. En déduire, grâce au théorème de Césaro (cf 2), un équivalent simple de a_n .

Exercice 9. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$

1. Donner, dans un même tableau, les variations sur $\mathbb{R}_+$ de $f : x \longrightarrow \frac{1}{1+x}$ et celles de $g = f \circ f$, ainsi que les signes de $x \longrightarrow f(x) - x$ et $x \longrightarrow g(x) - x$.
2. En déduire que les suites $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 10. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $a_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n + e^{-a_n}$.

1. Etudier la monotonie et la convergence $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Etudier la suite $(e^{a_{n+1}} - e^{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire un équivalent de a_n .

AUTRES TYPES DE SUITES

Exercice 11. 1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termes généraux $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

sont convergentes vers une même limite L .

2. Un réel $\varepsilon > 0$ étant donné, déterminer un rang n_ε au delà duquel on a $|u_n - L| < \varepsilon$.
3. Exemple : avec la calculatrice, donner une valeur approchée de L à 10^{-2} près.

Exercice 12. Etudier la limite éventuelle des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ données par :

$$a_0 > 0, b_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n + b_n}. \text{ (On posera } d = b_0 - a_0 \text{).}$$

Exercice 13. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = -1 + X + X^2 + \dots + X^n$. Montrer que P_n a une unique racine positive a_n . Etudier la convergence de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et sa limite.

SUITES USUELLES

Exercice 14. Etudier la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 2$.

Exercice 15. Etudier la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 1$.

Exercice 16. Déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1, u_1 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

Exercice 17. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1, u_1 = -\frac{5}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} - u_n = n$

1. Déterminer une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (an + b)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} + 2v_{n+1} - v_n = n$
2. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} + 2w_{n+1} - w_n = 0$.
3. En déduire la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICES DE BANQUE CCINP

VIEIL EXERCICE 1 analyse

Énoncé exercice 1

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

EXERCICE 43 analyse

Enoncé exercice 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

EXERCICE 55 analyse

Énoncé exercice 55

Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
(b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .

Indication : discuter suivant les valeurs de a .