

SÉRIES : RÉVISIONS DE SUP

Exercice 1. x est un réel quelconque et on pose, pour tout entier n , $u_n = \frac{\sin(nx)}{3^n}$.

1. Prouver la convergence de la série $\sum u_n$.
2. Calculer les sommes partielles de la série $\sum u_n$ puis calculer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 2. Pour $n > 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n^3 - n}$.

1. Prouver la convergence de la série $\sum_{n>1} u_n$.
2. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{X^3 - X}$.
3. Pour $n > 4$, simplifier $S_n = \sum_{k=2}^n u_k$. En déduire la somme de la série $\sum_{n>1} u_n$.

Exercice 3. Montrer la divergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = e^{\frac{i n \pi}{4}}$
2. $u_n = \frac{2^n + i 4^n}{3^n}$
3. $u_n = \operatorname{th}(n)$
4. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$

Exercice 4. Grâce à une comparaison par o ou O , déterminer la nature de $\sum u_n$ lorsque :

1. $u_n = \frac{1}{\ln(n)}$
2. $u_n = \frac{1}{n^3 \sqrt{\ln(n)}}$
3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} \sin^2 n}$

Exercice 5. Grâce à des équivalents, déterminer la nature de $\sum u_n$ lorsque :

1. $u_n = \arctan\left(\frac{n}{n^2 + 1}\right)$
2. $u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$
3. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{e}$
4. $u_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n}$
5. $u_n = \tan\left(\frac{n\pi}{4n+1}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$
6. $u_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n \ln(n)}$
7. $u_n = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{1}{2n}\right)$

Exercice 6. Déterminer en fonction des paramètres a et b de $\mathbb{R}_+^*$, la nature de $\sum u_n$ lorsque :

1. $u_n = \frac{a^n}{a^n + \ln(n)}$
2. $u_n = \frac{a^n}{b^n + 1}$

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n 3^{-n}$ et $v_n = (n+1) 3^{-n}$.

1. Prouver la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
2. Trouver des relations entre les sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ afin de retrouver leur convergence et de calculer leurs sommes.

Exercice 8. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose pour $n > 0$, $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $\sum_{n>0} u_n$ soit convergente.

2. Lorsqu'elle existe, calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exercice 9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, pour $n > 0$, on pose $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + \alpha}$

1. Calculer $\int_0^1 (t^{n-1} - t^{n-1+\alpha}) dt$.
2. Montrer que la fonction f_α définie sur $[0, 1]$ par : $f_\alpha(t) = \frac{1-t^\alpha}{1-t}$ si $t \in [0, 1[$ et $f_\alpha(1) = \alpha$ est continue sur $[0, 1]$.
3. Montrer que $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \int_0^1 f_\alpha(t) dt$.
4. Retrouver par une autre méthode les résultats obtenus pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

COMPLEMENTS : SÉRIES ALTERNÉES ET COMPARAISONS

Exercice 10. Série harmonique alternée : terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ($n > 0$). On pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

1. *Première méthode* : Montrer que $S_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. En déduire la convergence de $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et sa limite, puis la convergence de $\sum u_n$ et sa somme.
2. *Deuxième méthode* : En remarquant que $\int_0^1 x^{k-1} dx = \frac{1}{k}$, mettre S_n sous forme d'une intégrale. En déduire la convergence de $\sum u_n$ et sa somme

Exercice 11. Grâce à une comparaison à une série de Riemann ou une série géométrique (règle de d'Alembert), déterminer la nature de $\sum u_n$ lorsque :

- | | | |
|----------------------------|---|----------------------------------|
| 1. $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ | 3. $u_n = \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n$ | 5. $u_n = e^{-\ln^2(n)}$ |
| 2. $u_n = n^{-n^2}$ | 4. $u_n = \frac{n^{\ln(n)}}{n!}$ | 6. $u_n = \frac{2^n}{\sqrt{n!}}$ |

Exercice 12. Séries de Bertrand : séries de terme général $u_n = \frac{1}{n^a (\ln n)^b}$ $n > 1$.

1. Cas où $a > 1$. Montrer que si $a > 1$ une comparaison de Riemann permet dans tous les cas de déterminer la nature de $\sum u_n$.
2. Cas où $a < 1$
 - (a) Lorsque $a < 0$, montrer que $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
 - (b) Lorsque $0 \leq a < 1$, étudier la limite de nu_n et déterminer la nature de $\sum u_n$.
3. Cas où $a = 1$
 - (a) Lorsque $b \leq 0$, déterminer la nature de $\sum u_n$ par une comparaison de Riemann.
 - (b) Lorsque $b > 0$, déterminer la nature de $\sum u_n$ par une comparaison avec une intégrale.

Exercice 13. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ lorsque :

- | | | |
|---|--------------------------------------|---|
| 1. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ | 3. $u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln^2(n)}$ | 4. $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n + (-1)^n)}$ |
| 2. $u_n = \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + 1} \right)$ | | 5. $u_n = \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + a} \right)$ |

$$6. u_n = \frac{(-1)^n}{n^a \ln(n)}$$

$$7. u_n = \frac{1}{n^a + (-1)^n n^b}$$

$$8. u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}}$$

Exercice 14. 1. Pour $n > 0$, on pose $x_n = \ln^2(n)$. Déterminer un équivalent de $x_{n+1} - x_n$ et en déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$.

2. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{\ln^2 k}{k}$.

Exercice 15. Soit $\sum u_n$ une série de réels positifs.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge et que $u_{n+1} = o(u_n)$. Montrer que : $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim u_{n+1}$.

2. Exemple : donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k!}$.

Exercice 16. Soit $\sum u_n$ une série de réels positifs.

1. On suppose que $\sum u_n$ diverge et que $u_n = o(u_{n+1})$. Donner un équivalent simple de $\sum_{k=0}^n u_k$.

2. Exemple : Pour quels entiers naturels p la série de terme général $a_n = \frac{\sum_{k=0}^n k!}{(n+p)!}$ est elle convergente ?

Exercice 17. En utilisant un encadrement de u_n par des intégrales, déterminer un équivalent des restes partiels (lorsqu'ils existent) ou des sommes partielles (lorsqu'elles divergent) de $\sum u_n$ dans les deux cas suivants :

$$1. u_n = \frac{1}{n \ln n}$$

$$2. u_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Exercice 18. 1. Pour $a \neq 1$, déterminer x_n telle que $\frac{1}{n^a} \sim x_{n+1} - x_n$. En déduire, selon que $a > 1$ ou $a < 1$ un équivalent des restes partiels ou des sommes partielles de $\sum \frac{1}{n^a}$

2. Pour $a = 1$, déterminer x_n telle que $\frac{1}{n} \sim x_{n+1} - x_n$. Quel équivalent obtient-on alors par sommation ?

Exercice 19. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $x_{n+1} = \sin(x_n)$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et converge vers 0. Montrer que $\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}$ converge et en déduire un équivalent de x_n sans utiliser le théorème de Césaro. Quelle est la nature de la série $\sum x_n$?

Exercice 20. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_{n+1} = \sqrt{x_n + x_n^2}$.

1. Etudier le comportement asymptotique de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

2. Etudier la limite de la suite $x_{n+1} - x_n$, en déduire un équivalent de x_n

3. Quelle est, selon le paramètre a , la nature de la série $\sum (x_n)^a$

Exercice 21. Déterminer la nature de $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = n^{-1-\frac{1}{n}}$
2. $u_n = (n + (-1)^n \sqrt{n})^{-\frac{1}{2}}$
3. $u_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$
4. $u_n = \frac{a\sqrt{n}}{n^b} \quad (a > 0)$
5. $u_n = e^{-\sqrt{n^2-1}}$
6. $u_n = \frac{(\ln(n))^n}{n!}$
7. $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$
8. $u_n = \left(\operatorname{ch}(\sqrt{\ln(n)})\right)^{-2}$
9. $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{t}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$
10. $u_n = \sin(n)$
11. $u_n = \ln(n) \cdot \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
12. $u_n = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{n+1}\right)$
13. $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$
14. $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$
15. $u_n = \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \cdot \ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)$
16. $u_n = \frac{\pi}{2} - \arctan(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$
17. $u_n = (\ln(\ln(n)))^{-\ln(\ln(n))}$
18. $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)\right)^n \quad (a > 0)$

Exercice 22. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0, \pi]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \cos u_n$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$

FAMILLES SOMMABLES

Exercice 23. Soit a un réel strictement positif. Les familles $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont-elles sommables ?

Exercice 24. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(p+2)^{(q+2)}}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 25. Soient a et b deux nombres complexes. A quelle condition la famille $\left(a^p b^q\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ? Le cas échéant, calculer la somme.

Exercice 26. Soient a et b deux nombres complexes. A quelle condition la famille $\left(\frac{a^p b^q}{(p+q)!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ? Le cas échéant, calculer la somme.

Exercice 27. Pour $x \in]1, +\infty[$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminer les réels α strictement positifs pour lesquels la famille $\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. Lorsque c'est le cas, exprimer sa somme avec la fonction ζ .
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2$. Montrer que la famille $\left(\frac{z^n}{p^n}\right)_{p \geq 2, n \geq 2}$ est sommable.
3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (\zeta(n) - 1)$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 28. Pour $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $u_{p,q} = \frac{p^q}{(p+1)^{q+1}} - \frac{(p+1)^q}{(p+2)^{q+1}}$. Examiner l'existence et déterminer la valeur éventuelle des quantités suivantes :

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $V_p = \sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}$ puis $S_1 = \sum_{p=1}^{+\infty} V_p$.
2. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, $W_q = \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q}$ puis $S_2 = \sum_{q=1}^{+\infty} W_q$.

3. Qu'en déduit-on concernant la famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$?

Exercice 29. Montrer que la série produit de Cauchy de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ par elle-même est grossièrement divergente.

Exercice 30. Soit a un réel.

1. Montrer que pour tout x dans l'intervalle $] -1, 1[$, $f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right) x^n$ est bien définie.
2. Montrer que : $\forall x \in] -1, 1[$, $f_a(x) = \frac{e^{ax}}{1-x}$

Exercice 31. 1. z étant un complexe, déterminer le terme général u_n de la série produit de Cauchy de $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ par elle-même.

2. Déterminer les complexes z pour lesquels $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est convergente et calculer dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}$.

EXERCICES D'ORAL OU RECHERCHE

Exercice 32. BANQUE CCP MP Exercice de banque 7 (version 2023)

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
Montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)}$.

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

Exercice 33. BANQUE CCP MP Exercice de banque 46 (version 2023)

On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 34. Établir la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{2n+1}$.

Indication pour le calcul de la somme : Utiliser $\int_0^1 (t^{4n} + t^{4n+2}) dt$ et calculer les sommes partielles

Exercice 35. $a \in \mathbb{R}$ fixé. $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par la donnée de $u_1 > 0$ et la relation : $\forall n > 0, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^a u_n}$.

1. Discuter la convergence de $(u_n)_{n \geq 0}$ selon la valeur de a
2. Donner un équivalent de $u_n - \lim(u_n)$ lorsque $a > 1$ et un équivalent de u_n lorsque $a = 1$.

EXERCICES DE BANQUE CCINP

Dans la feuille d'exercices, il y avait déjà les exercices 7 et 46 de la banque CCINP

EXERCICE 5 analyse

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n (\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas $\alpha \leq 0$**

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

(b) **Cas $\alpha > 0$**

Étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

EXERCICE 6 analyse

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?