

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 02

Ce devoir est constitué de deux problèmes indépendants.

Le problème I est à traiter par tous. Le second problème peut-être considéré comme facultatif

Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

PROBLEME I

L'objectif de ce problème est d'établir de nouvelles règles permettant de décider de la convergence de séries à termes réels positifs, de comparer leurs performances et de prendre conscience de leurs limites.

Partie I

La règle de Cauchy

Dans cette partie, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, et on suppose que la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite L , réelle ou infinie.

1. Le cas de convergence : $L < 1$.

On suppose dans cette question que $L \in [0, 1[$.

- 1.a) On fixe un réel q dans l'intervalle $]L, 1[$. Montrer l'existence d'un rang n_0 au delà duquel on a : $0 < u_n < q^n$.

- 1.b) En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.

2. Le cas de divergence : $L > 1$.

On suppose dans cette question que $L \in]1, +\infty[$ ou $L = +\infty$.

- 2.a) On suppose $L \in]1, +\infty[$. Montrer l'existence d'un rang n_0 au delà duquel on a : $u_n \geq 1$. Quelle est alors la nature de la série $\sum u_n$.

- 2.b) Montrer que l'on aboutit à la même conclusion lorsque l'on suppose $L = +\infty$

3. Le cas litigieux : $L = 1$.

α étant un paramètre réel, on pose, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

- 3.a) Déterminer la limite de la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- 3.b) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? Que peut-on dire de la règle de Cauchy dans ce cas ?

4. Exemple. Pour tout entier n , on pose $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

- 4.a) En utilisant la règle de Cauchy, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

- 4.b) Retrouver la nature de cette série par une autre méthode.

5. Un exemple où la règle de Cauchy est plus performante que la règle de d'Alembert.

Pour tout entier n , on pose $u_n = \frac{n^{(-1)^n}}{2^n} = \frac{\exp((-1)^n \ln(n))}{2^n}$. D'autre part, on pose, pour $n > 0$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \sqrt[n]{u_n}$.

- 5.a) Montrer que la série $\sum u_n$ n'est pas grossièrement divergente.

- 5.b) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente. Quelle conclusion la règle de d'Alembert fournit-elle quant à l'étude de $\sum u_n$?

- 5.c) Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite. Quelle conclusion la règle de Cauchy fournit-elle quant à l'étude de $\sum u_n$?

6. Preuve du fait que la règle de d'Alembert n'est jamais plus performante que la règle de Cauchy.

On revient au cas général d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs. On pose, pour $n > 0$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \sqrt[n]{u_n}$.

On pourra utiliser librement le théorème de Césaro.

- 6.a) Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Montrer que si la suite $(z_n - z_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite L , alors la suite $\left(\frac{z_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers L .

- 6.b) Montrer que si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $L > 0$, alors la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers L .

- 6.c) Montrer que si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0, alors la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

- 6.d)** Montrer que si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, alors la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
- 6.e)** En déduire que chaque fois que la règle de d'Alembert permettra de déterminer la nature de la série $\sum u_n$, la règle de Cauchy permettra également d'aboutir à la même conclusion

Partie II

Quelques autres améliorations de la règle de d'Alembert

1. La comparaison logarithmique.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs et on suppose qu'il existe un rang n_0 au delà duquel, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

- 1.a)** Montrer l'existence d'un réel positif A , tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait : $0 \leq u_n \leq A v_n$.
- 1.b)** En déduire que la convergence de la série $\sum v_n$ entraîne celle de la série $\sum u_n$. Quel résultat obtient-on en contraposant cette affirmation ?
- 1.c)** Montrer que si la règle de d'Alembert permet de conclure à la convergence de la série $\sum u_n$, alors on peut choisir une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique, pour laquelle la règle de comparaison logarithmique aboutira à la même conclusion.
- 1.d)** Montrer que si la règle de d'Alembert permet de conclure à la divergence de la série $\sum v_n$, alors on peut choisir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique, pour laquelle la règle de comparaison logarithmique aboutira à la même conclusion.
- 1.e)** Un exemple où la règle de comparaison logarithmique est plus performante que la règle de d'Alembert : pour $n > 0$, on pose : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \sqrt{n!} \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Effectuer les développements limités à l'ordre 1 selon les puissances de $\frac{1}{n}$ de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$. Quelle est la nature de la série $\sum v_n$? La règle de d'Alembert aurait-elle permis d'aboutir à cette conclusion ?

2. La règle de Raabe-Duhamel.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose l'existence d'un réel μ pour lequel on a le développement limité : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

- 2.a)** Montrer que, si $\mu < 0$, alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
- 2.b)** β étant un paramètre réel, on pose pour $n > 0$, $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Déterminer le réel γ tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
- 2.c)** On suppose que $\mu \in [0, 1[$. Montrer que l'on peut choisir β de sorte que $\sum v_n$ diverge et que, au delà d'un certain rang, on ait : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Quelle est alors la nature de la série $\sum u_n$?
- 2.d)** On suppose que $\mu \in]1, +\infty[$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

3. Le cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

Pour $n > 1$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

- 3.a)** Montrer que $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Quelle est la nature de $\sum x_n$?
- 3.b)** Montrer que $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
- 3.c)** Quelle est la nature de $\sum y_n$?
- 3.d)** Quelle conclusion peut-on en tirer concernant la règle de Raabe-Duhamel lorsque $\mu = 1$?

4. Une amélioration de la règle de Raabe-Duhamel dans le cas $\mu = 1$.

On suppose ici que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs et on suppose l'existence d'une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que $\sum r_n$ soit absolument convergente et : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + r_n$

- 4.a)** Pour tout entier $n > 0$, on pose $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $\delta_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$. Montrer, à l'aide d'un équivalent, que la série $\sum \delta_n$ est convergente. En déduire l'existence d'un réel γ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$

- 4.b)** Prouver la convergence de la série de terme général $t_n = \left(r_n - \frac{1}{n}\right)^2$. En déduire que l'on peut écrire $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -\frac{1}{n} + \rho_n$ où ρ_n est le terme général d'une série absolument convergente.
- 4.c)** Déduire des deux questions précédentes l'existence d'un réel A (que l'on ne cherchera pas à déterminer) tel que $\ln(u_n) = -\ln(n) + A + o(1)$. En déduire un équivalent de u_n et la nature de $\sum u_n$.
- 5.** Exemple d'application : la formule de Stirling.
- On prend ici, pour $n > 0$, $u_n = \frac{e^n \cdot n!}{n^{n+\frac{3}{2}}}$, et on suppose bien sûr ne pas connaître la formule de Stirling.
- 5.a)** Montrer l'existence d'une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels, terme général d'une série absolument convergente telle que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + r_n$.
- 5.b)** En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que $u_n \sim \frac{K}{n}$. On a donc l'équivalent : $n! \sim K \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n}$.
Reste à déterminer K .
La valeur de K s'obtient grâce aux intégrales de Wallis : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$.
- 5.c)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. Montrer alors que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} - \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$, puis montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n I_n I_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$ (étudier les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1})).
- 5.d)** Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et à termes strictement positifs. En déduire que pour $n \geq 2$, on a $u_n \leq n I_n^2 \leq \frac{n}{n-1} u_{n-1}$. Montrer alors que $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$.
- 5.e)** Donner alors deux équivalents pour I_{2n}^2 et en déduire la valeur de K .

PROBLEME II : Répartition des nombres premiers

Étant donné un entier naturel n , on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris dans l'intervalle $[0, n]$. On note aussi $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Ce problème vise à établir l'encadrement :

$$\ln 2 \frac{n}{\ln n} \leq \pi(n) \leq e \frac{n}{\ln n}$$

valable pour tout $n \geq 3$.

Étant donné un entier $n \geq 1$ et un nombre premier p , on rappelle que la *valuation p -adique* de n est l'entier noté $v_p(n)$ égal à l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n . On rappelle les propriétés suivantes :

- $\Leftrightarrow v_p(n)$ est l'unique entier k tel que p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n .
- $\Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq 1$ fixé, la suite $(v_p(n))_{p \in \mathcal{P}}$ est nulle à partir d'un certain rang, de sorte que l'on peut écrire $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$, ce produit pouvant être considéré comme un produit fini. Cette écriture est la décomposition de n en facteurs premiers.
- $\Leftrightarrow$ Pour tous n, m entiers naturels non nuls et pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a : $v_p(mn) = v_p(n) + v_p(m)$, $v_p(\text{pgcd}(m, n)) = \min(v_p(n), v_p(m))$, $v_p(\text{ppcm}(m, n)) = \max(v_p(n), v_p(m))$

Partie I : Une minoration de la fonction π

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Delta_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$. On considère $a, b \in \mathbb{N}$ vérifiant $1 \leq b \leq a$ et on pose : $I(b, a) = \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{a-b} dx$

- 1. 1.a)** Montrer que si $b < a$ alors $I(b+1, a) = \frac{b}{a-b} I(b, a)$.

1.b) En déduire que $I(b, a) = \frac{1}{b \binom{a}{b}}$

- 2. 2.a)** Montrer que $I(b, a) = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}$.

2.b) En multipliant l'égalité précédente par Δ_a , montrer que l'entier $b \binom{a}{b}$ divise Δ_a .

- 3.** Soit $n \geq 1$ un entier.

- 3.a)** En remarquant que pour tout $k \geq 1$, Δ_k divise Δ_{k+1} , montrer que les entiers $n \binom{2n}{n}$ et $(2n+1) \binom{2n}{n}$ divisent Δ_{2n+1} .
- 3.b)** En déduire que l'entier $n(2n+1) \binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1} (on justifiera d'abord que $n \wedge (2n+1) = 1$)
- 3.c)** Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on a l'inégalité $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.
- 3.d)** En déduire que : $(2n+1) \binom{2n}{n} \geq 4^n$. *indication : développer $(1+1)^{2n}$*
- 3.e)** Conclure que : $\Delta_{2n+1} \geq n4^n$.
- 3.f)** Montrer que si $n \geq 9$, alors $\Delta_n \geq 2^n$ et vérifier que cette inégalité est encore vraie pour $n = 7$ et $n = 8$.
- 4.** Soit $n \geq 1$ un entier.
- 4.a)** Soit $p \in \mathcal{P}$. Exprimer $v_p(\Delta_n)$ en fonction de $v_p(1), \dots, v_p(n)$ puis montrer que $p^{v_p(\Delta_n)} \leq n$.
- 4.b)** Montrer que : $\Delta_n = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p^{v_p(\Delta_n)}$.
- 4.c)** En déduire que : $\Delta_n \leq n^{\pi(n)}$.
- 5. 5.a)** Montrer que pour tout $n \geq 7$, $\pi(n) \geq \ln 2 \frac{n}{\ln n}$.
- 5.b)** Pour quels entiers $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, l'inégalité précédente est-elle encore vraie ?

Partie II : Une majoration de la fonction π

- 1.** On cherche dans cette question à majorer simplement le produit $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p$ en fonction de l'entier $n \geq 1$.
- 1.a)** Soient a, b deux entiers tels que $0 < \frac{b}{2} \leq a < b$. Montrer que le produit $\prod_{\substack{a < p \leq b \\ p \in \mathcal{P}}} p$ divise l'entier $\binom{b}{a}$, le produit étant considéré comme égal à 1 dans le cas où il n'y aurait pas de nombre premier dans l'intervalle $]a, b]$.
- 1.b)** En déduire que, pour tout entier $m \geq 1$, le produit $\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p$ divise l'entier $\binom{2m+1}{m+1}$.
- 1.c)** Comparer pour $m \geq 1$, les entiers $\binom{2m+1}{m}$ et $\binom{2m+1}{m+1}$.
- 1.d)** En déduire que pour tout entier $m \geq 1$, on a $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$. (*indication : $(1+1)^{2m+1} = \dots$*)
- 1.e)** Montrer que pour tout entier $m \geq 1$, $\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^m$.
- 1.f)** Prouver finalement que pour tout $n \geq 1$, on a : $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^n$.
- (on pourra montrer par récurrence pour $n \geq 1$ la propriété $P(n)$: pour tout $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, on a $\prod_{\substack{p \leq k \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^k$).
- 2. 2.a)** Montrer que pour tout $m \geq 1$, $m! \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m$.
- 2.b)** Déduire de ce qui précède que pour tout $n \geq 2$, $(\pi(n))! \leq 4^n$, puis que :
- $$\pi(n) \ln(\pi(n)) - \pi(n) \leq n \ln 4$$
- .
- 3.** On souhaite montrer, à partir du résultat précédent que, pour tout $n \geq 3$, on a : $\pi(n) \leq e \frac{n}{\ln(n)}$.
- Pour cela, on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un entier $n_0 \geq 3$, tel que :
- $$\pi(n_0) > e \frac{n_0}{\ln n_0}.$$
- 3.a)** Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$ sur $[1, +\infty[$.
- En déduire que $\frac{e - \ln 4}{e} < \frac{\ln(\ln n_0)}{\ln n_0}$.
- 3.b)** Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est majorée par e^{-1} sur $[1, +\infty[$ et conclure.