

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 02

Ce devoir est constitué de deux problèmes indépendants.

Le problème I est à traiter par tous. Le second problème peut-être considéré comme facultatif

Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

PROBLEME I

L'objectif de ce problème est d'établir de nouvelles règles permettant de décider de la convergence de séries à termes réels positifs, de comparer leurs performances et de prendre conscience de leurs limites.

Partie I

La règle de Cauchy

Dans cette partie, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, et on suppose que la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite L , réelle ou infinie.

1. Le cas de convergence : $L < 1$.

On suppose dans cette question que $L \in [0, 1[$.

- 1.a) On fixe un réel q dans l'intervalle $]L, 1[$. Montrer l'existence d'un rang n_0 au delà duquel on a : $0 < u_n < q^n$.

- 1.b) En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.

2. Le cas de divergence : $L > 1$.

On suppose dans cette question que $L \in]1, +\infty[$ ou $L = +\infty$.

- 2.a) On suppose $L \in]1, +\infty[$. Montrer l'existence d'un rang n_0 au delà duquel on a : $u_n \geq 1$. Quelle est alors la nature de la série $\sum u_n$.

- 2.b) Montrer que l'on aboutit à la même conclusion lorsque l'on suppose $L = +\infty$

3. Le cas litigieux : $L = 1$.

α étant un paramètre réel, on pose, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

- 3.a) Déterminer la limite de la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- 3.b) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? Que peut-on dire de la règle de Cauchy dans ce cas ?

4. Exemple. Pour tout entier n , on pose $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

- 4.a) En utilisant la règle de Cauchy, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

- 4.b) Retrouver la nature de cette série par une autre méthode.

5. Un exemple où la règle de Cauchy est plus performante que la règle de d'Alembert.

Pour tout entier n , on pose $u_n = \frac{n^{(-1)^n}}{2^n} = \frac{\exp((-1)^n \ln(n))}{2^n}$. D'autre part, on pose, pour $n > 0$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \sqrt[n]{u_n}$.

- 5.a) Montrer que la série $\sum u_n$ n'est pas grossièrement divergente.

- 5.b) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente. Quelle conclusion la règle de d'Alembert fournit-elle quant à l'étude de $\sum u_n$?

- 5.c) Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite. Quelle conclusion la règle de Cauchy fournit-elle quant à l'étude de $\sum u_n$?

6. Preuve du fait que la règle de d'Alembert n'est jamais plus performante que la règle de Cauchy.

On revient au cas général d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs. On pose, pour $n > 0$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \sqrt[n]{u_n}$.

On pourra utiliser librement le théorème de Césaro.

- 6.a) Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Montrer que si la suite $(z_n - z_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite L , alors la suite $\left(\frac{z_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers L .

- 6.b) Montrer que si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $L > 0$, alors la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers L .

- 6.c) Montrer que si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0, alors la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

- 6.d)** Montrer que si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, alors la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
- 6.e)** En déduire que chaque fois que la règle de d'Alembert permettra de déterminer la nature de la série $\sum u_n$, la règle de Cauchy permettra également d'aboutir à la même conclusion

Partie II

Quelques autres améliorations de la règle de d'Alembert

1. La comparaison logarithmique.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs et on suppose qu'il existe un rang n_0 au delà duquel, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

- 1.a)** Montrer l'existence d'un réel positif A , tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait : $0 \leq u_n \leq A v_n$.
- 1.b)** En déduire que la convergence de la série $\sum v_n$ entraîne celle de la série $\sum u_n$. Quel résultat obtient-on en contraposant cette affirmation ?
- 1.c)** Montrer que si la règle de d'Alembert permet de conclure à la convergence de la série $\sum u_n$, alors on peut choisir une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique, pour laquelle la règle de comparaison logarithmique aboutira à la même conclusion.
- 1.d)** Montrer que si la règle de d'Alembert permet de conclure à la divergence de la série $\sum v_n$, alors on peut choisir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique, pour laquelle la règle de comparaison logarithmique aboutira à la même conclusion.
- 1.e)** Un exemple où la règle de comparaison logarithmique est plus performante que la règle de d'Alembert : pour $n > 0$, on pose : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \sqrt{n!} \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Effectuer les développements limités à l'ordre 1 selon les puissances de $\frac{1}{n}$ de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$. Quelle est la nature de la série $\sum v_n$? La règle de d'Alembert aurait-elle permis d'aboutir à cette conclusion ?

2. La règle de Raabe-Duhamel.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose l'existence d'un réel μ pour lequel on a le développement limité : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

- 2.a)** Montrer que, si $\mu < 0$, alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
- 2.b)** β étant un paramètre réel, on pose pour $n > 0$, $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Déterminer le réel γ tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
- 2.c)** On suppose que $\mu \in [0, 1[$. Montrer que l'on peut choisir β de sorte que $\sum v_n$ diverge et que, au delà d'un certain rang, on ait : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Quelle est alors la nature de la série $\sum u_n$?
- 2.d)** On suppose que $\mu \in]1, +\infty[$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

3. Le cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

Pour $n > 1$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

- 3.a)** Montrer que $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Quelle est la nature de $\sum x_n$?
- 3.b)** Montrer que $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
- 3.c)** Quelle est la nature de $\sum y_n$?
- 3.d)** Quelle conclusion peut-on en tirer concernant la règle de Raabe-Duhamel lorsque $\mu = 1$?

4. Une amélioration de la règle de Raabe-Duhamel dans le cas $\mu = 1$.

On suppose ici que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs et on suppose l'existence d'une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que $\sum r_n$ soit absolument convergente et : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + r_n$

- 4.a)** Pour tout entier $n > 0$, on pose $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $\delta_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$. Montrer, à l'aide d'un équivalent, que la série $\sum \delta_n$ est convergente. En déduire l'existence d'un réel γ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$

- 4.b)** Prouver la convergence de la série de terme général $t_n = \left(r_n - \frac{1}{n}\right)^2$. En déduire que l'on peut écrire $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -\frac{1}{n} + \rho_n$ où ρ_n est le terme général d'une série absolument convergente.
- 4.c)** Déduire des deux questions précédentes l'existence d'un réel A (que l'on ne cherchera pas à déterminer) tel que $\ln(u_n) = -\ln(n) + A + o(1)$. En déduire un équivalent de u_n et la nature de $\sum u_n$.
- 5.** Exemple d'application : la formule de Stirling.
- On prend ici, pour $n > 0$, $u_n = \frac{e^n \cdot n!}{n^{n+\frac{3}{2}}}$, et on suppose bien sûr ne pas connaître la formule de Stirling.
- 5.a)** Montrer l'existence d'une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels, terme général d'une série absolument convergente telle que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + r_n$.
- 5.b)** En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que $u_n \sim \frac{K}{n}$. On a donc l'équivalent : $n! \sim K \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n}$.
Reste à déterminer K .
La valeur de K s'obtient grâce aux intégrales de Wallis : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$.
- 5.c)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. Montrer alors que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} - \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$, puis montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n I_n I_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$ (étudier les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1})).
- 5.d)** Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et à termes strictement positifs. En déduire que pour $n \geq 2$, on a $u_n \leq n I_n^2 \leq \frac{n}{n-1} u_{n-1}$. Montrer alors que $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$.
- 5.e)** Donner alors deux équivalents pour I_{2n}^2 et en déduire la valeur de K .

PROBLEME II : Répartition des nombres premiers

Étant donné un entier naturel n , on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris dans l'intervalle $[0, n]$. On note aussi $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Ce problème vise à établir l'encadrement :

$$\ln 2 \frac{n}{\ln n} \leq \pi(n) \leq e \frac{n}{\ln n}$$

valable pour tout $n \geq 3$.

Étant donné un entier $n \geq 1$ et un nombre premier p , on rappelle que la *valuation p -adique* de n est l'entier noté $v_p(n)$ égal à l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n . On rappelle les propriétés suivantes :

- $\Leftrightarrow v_p(n)$ est l'unique entier k tel que p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n .
- $\Leftrightarrow$ Pour tout $n \geq 1$ fixé, la suite $(v_p(n))_{p \in \mathcal{P}}$ est nulle à partir d'un certain rang, de sorte que l'on peut écrire $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$, ce produit pouvant être considéré comme un produit fini. Cette écriture est la décomposition de n en facteurs premiers.
- $\Leftrightarrow$ Pour tous n, m entiers naturels non nuls et pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a : $v_p(mn) = v_p(n) + v_p(m)$, $v_p(\text{pgcd}(m, n)) = \min(v_p(n), v_p(m))$, $v_p(\text{ppcm}(m, n)) = \max(v_p(n), v_p(m))$

Partie I : Une minoration de la fonction π

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Delta_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$. On considère $a, b \in \mathbb{N}$ vérifiant $1 \leq b \leq a$ et on pose : $I(b, a) = \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{a-b} dx$

- 1. 1.a)** Montrer que si $b < a$ alors $I(b+1, a) = \frac{b}{a-b} I(b, a)$.

1.b) En déduire que $I(b, a) = \frac{1}{b \binom{a}{b}}$

- 2. 2.a)** Montrer que $I(b, a) = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}$.

2.b) En multipliant l'égalité précédente par Δ_a , montrer que l'entier $b \binom{a}{b}$ divise Δ_a .

- 3.** Soit $n \geq 1$ un entier.

- 3.a)** En remarquant que pour tout $k \geq 1$, Δ_k divise Δ_{k+1} , montrer que les entiers $n \binom{2n}{n}$ et $(2n+1) \binom{2n}{n}$ divisent Δ_{2n+1} .
- 3.b)** En déduire que l'entier $n(2n+1) \binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1} (on justifiera d'abord que $n \wedge (2n+1) = 1$)
- 3.c)** Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on a l'inégalité $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.
- 3.d)** En déduire que : $(2n+1) \binom{2n}{n} \geq 4^n$. *indication : développer $(1+1)^{2n}$*
- 3.e)** Conclure que : $\Delta_{2n+1} \geq n4^n$.
- 3.f)** Montrer que si $n \geq 9$, alors $\Delta_n \geq 2^n$ et vérifier que cette inégalité est encore vraie pour $n = 7$ et $n = 8$.
- 4.** Soit $n \geq 1$ un entier.
- 4.a)** Soit $p \in \mathcal{P}$. Exprimer $v_p(\Delta_n)$ en fonction de $v_p(1), \dots, v_p(n)$ puis montrer que $p^{v_p(\Delta_n)} \leq n$.
- 4.b)** Montrer que : $\Delta_n = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p^{v_p(\Delta_n)}$.
- 4.c)** En déduire que : $\Delta_n \leq n^{\pi(n)}$.
- 5. 5.a)** Montrer que pour tout $n \geq 7$, $\pi(n) \geq \ln 2 \frac{n}{\ln n}$.
- 5.b)** Pour quels entiers $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, l'inégalité précédente est-elle encore vraie ?

Partie II : Une majoration de la fonction π

- 1.** On cherche dans cette question à majorer simplement le produit $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p$ en fonction de l'entier $n \geq 1$.
- 1.a)** Soient a, b deux entiers tels que $0 < \frac{b}{2} \leq a < b$. Montrer que le produit $\prod_{\substack{a < p \leq b \\ p \in \mathcal{P}}} p$ divise l'entier $\binom{b}{a}$, le produit étant considéré comme égal à 1 dans le cas où il n'y aurait pas de nombre premier dans l'intervalle $]a, b]$.
- 1.b)** En déduire que, pour tout entier $m \geq 1$, le produit $\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p$ divise l'entier $\binom{2m+1}{m+1}$.
- 1.c)** Comparer pour $m \geq 1$, les entiers $\binom{2m+1}{m}$ et $\binom{2m+1}{m+1}$.
- 1.d)** En déduire que pour tout entier $m \geq 1$, on a $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$. (*indication : $(1+1)^{2m+1} = \dots$*)
- 1.e)** Montrer que pour tout entier $m \geq 1$, $\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^m$.
- 1.f)** Prouver finalement que pour tout $n \geq 1$, on a : $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^n$.
- (on pourra montrer par récurrence pour $n \geq 1$ la propriété $P(n)$: pour tout $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, on a $\prod_{\substack{p \leq k \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^k$).
- 2. 2.a)** Montrer que pour tout $m \geq 1$, $m! \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m$.
- 2.b)** Déduire de ce qui précède que pour tout $n \geq 2$, $(\pi(n))! \leq 4^n$, puis que :
- $$\pi(n) \ln(\pi(n)) - \pi(n) \leq n \ln 4$$
- .
- 3.** On souhaite montrer, à partir du résultat précédent que, pour tout $n \geq 3$, on a : $\pi(n) \leq e \frac{n}{\ln(n)}$.
- Pour cela, on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un entier $n_0 \geq 3$, tel que :
- $$\pi(n_0) > e \frac{n_0}{\ln n_0}.$$
- 3.a)** Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$ sur $[1, +\infty[$.
- En déduire que $\frac{e - \ln 4}{e} < \frac{\ln(\ln n_0)}{\ln n_0}$.
- 3.b)** Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est majorée par e^{-1} sur $[1, +\infty[$ et conclure.

Partie I: Règle de Cauchy

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de réels strictement positifs telle que $\sqrt[n]{u_n}$ a une limite L finie ou infinie lorsque n tend vers $+\infty$

1) Si: $L \in [0, 1[$

a) Soit $q \in]L, 1[$. Comme $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $L < q$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} < q$$

(on peut prendre $n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow$

$$|\sqrt[n]{u_n} - L| \leq \frac{q-L}{2}$$

$$0 < u_n \text{ alors } : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n < q^n$$

b) Or la série $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge car $q \in [0, 1[$ donc par convergence par minoration, la série $\sum u_n$ converge

2) a) Si: $L \in]1, +\infty[$. Soit $\varepsilon = L-1$. $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ et $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers L donc il existe

$$n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |\sqrt[n]{u_n} - L| \leq \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + 1 \leq \sqrt[n]{u_n} - L \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \geq 1 \Rightarrow u_n \geq 1$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

b) Si: $L = +\infty$. $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \geq 1 \Rightarrow u_n \geq 1$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement

3) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} / u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

$$a) \sqrt[n]{u_n} = n^{-\frac{\alpha}{n}} = \exp\left(-\frac{\alpha \ln n}{n}\right) \text{ or } \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\text{Donc } (\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 1$$

b) $\sum u_n$ est une série de Riemann qui est convergente si: $\alpha > 1$ et divergente si: $\alpha \leq 1$

Ainsi la règle de Cauchy ne permet pas de conclure dans le cas $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ car on a trouvé des séries de nature différente alors que l'on a la même réponse au test de Cauchy

$$4) u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$a) \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} = \frac{1}{e} \in [0, 1[$$

Donc d'après la règle de Cauchy, $\sum u_n$ converge

$$b) n^2 u_n = e^{2 \ln n} e^{-n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})} = \exp\left(-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 2 \ln n\right) \text{ or } 2 \ln n = o\left(n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

car $n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim n$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0$ Ainsi: par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ converge

$$5) u_n = \frac{(n)^{(n-1)^2}}{2^n}, \text{ pour } n > 0, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}, w_n = (u_n)^{1/n}$$

$$a) u_{2n} = \frac{2n}{2^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, u_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ a ses deux suites de termes d'ordre pair et d'ordre impair qui convergent vers } 0,$$

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

$$b) v_{2n} = \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} \times \frac{2^{2n}}{2n} = \frac{1}{4n(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$v_{2n+1} = (2n+1)2^{2n+1} \times \frac{2^{2n+2}}{2n+2} = (2n+1)(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Ainsi: $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge

Dans ce cas, la règle de d'Alembert ne se prononce pas

$$c) w_n = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(u_n)\right) = \exp\left(\frac{1}{n} ((n-1)^2 \ln n - n \ln 2)\right) = \exp\left(-\ln 2 + (1-\frac{1}{n}) \frac{\ln n}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

Ainsi, d'après la règle de Cauchy, $\sum u_n$ converge

6) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \sqrt[n]{u_n}$ (pour $n > 0$)

a) $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de réels / $(k_n - k_{n-1})_{n > 0}$ admet L pour limite



On pose $a_n = k_n - k_{n-1}$.

Chacun $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{k_n - k_0}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$ donc $\frac{k_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$

b) Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $L > 0$, $(\ln(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ln(L)$ ie $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ln(L)$

Donc d'après le 6a), $(\frac{\ln(u_n)}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ln(L)$. Donc par continuité de $\exp$,

$(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers L

c) Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, $(\ln(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ ($\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0 \dots$)

Donc $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ donc $(\frac{\ln(u_n)}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

Ainsi, comme $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$, $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

d) Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, $(\ln(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, donc $(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

donc $(\frac{\ln(u_n)}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ donc $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

e) La règle de d'Alembert permet de déterminer la nature de la série $\sum u_n$

lorsque $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite finie ou infinie $L \neq 1$. Mais dans chacun de ces cas,

$(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ possède la même limite L et donc dans chacun de ces cas, la règle de Cauchy permet également de déterminer la nature $\sum u_n$

Partie II

1) Comparaison logarithmique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ / $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0, v_n > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

a) Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites de réels strictement positifs, l'égalité

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ équivaut à $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$

Ainsi: $(\frac{u_n}{v_n})_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante à partir de n_0 . En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$

On pose $A = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq u_n \leq A v_n$

b) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum A v_n$ converge donc par comparaison $\sum u_n$ converge

Par contraposée, si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge

c) Si $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $L \in [0, 1[$. Soit $q \in]L, 1[$. Il existe un rang n_0 au delà duquel

on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$. On a alors l'existence de $A > 0 / \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq A q^n$

Or $\sum q^n$ converge donc $\sum u_n$ converge

* Si $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite L infinie ou dans $]1, +\infty[$. Il existe un rang n_0 au delà

duquel on a $1 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Donc il existe $A > 0 / \forall n \geq n_0, u_n \geq A$. Donc $\sum u_n$ diverge

On a vu dans la question précédente que chaque fois que la règle de d'Alembert permet de conclure, cela

e) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $v_n = \sqrt{n!} \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$



$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \sqrt{n+1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \sqrt{n} \sqrt{1+\frac{1}{n}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{n} \left(1+\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{6n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$\text{Donc } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \sim -\frac{1}{3n}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$ est négatif à partir d'un certain rang
ie $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

Comme $\sum u_n$ diverge (c'est une série de Riemann), $\sum v_n$ diverge également par comparaison logarithmique.

Par contre, la règle de d'Alembert ne permettrait pas de conclure car $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$ $\left(\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

2°) Raabe-Dubanel $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ $\mu \in \mathbb{R}$.

a) si $\mu < 0$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\frac{\mu}{n}$ positif donc il existe un rang n_0 au delà duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

Donc $(u_n)_{n \geq n_0}$ croissante à partir du rang n_0 . Or $(u_n)_{n \geq n_0}$ suite de réels strictement positifs, donc elle ne peut converger vers 0 (car croissante). Ainsi: $\sum u_n$ grossièrement divergente

b) $u_n = \frac{1}{n^\beta}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Ainsi: $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta - \mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\gamma = \beta - \mu$

c) Si $\mu \in [0, 1[$. On choisit $\beta \in]\mu, 1[$. On a $\sum \frac{1}{n^\beta}$ divergente et $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \sim \frac{\gamma}{n}$ avec $\gamma > 0$

Donc il existe un rang n_0 au delà duquel, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$

Ainsi: $\sum u_n$ diverge (par comparaison logarithmique)

d) Si $\mu \in]1, +\infty[$. Soit $\beta \in]1, \mu[$. On a $\sum \frac{1}{n^\beta}$ convergente et $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \sim \frac{\gamma}{n}$ avec $\gamma < 0$

Ainsi: $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Ainsi: par comparaison logarithmique, $\sum u_n$ converge

3) $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$

a) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Par ailleurs on sait que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge

b) $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{-2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^{-2} = \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

c) Par ailleurs la série de Bertrand $\sum y_n$ converge

En effet la fonction $f: t \rightarrow \frac{1}{t(\ln t)^2}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ donc $\sum f(n)$ et $\int_1^+ f(t) dt$ ont même nature.

Or $\int_1^+ f(t) dt = \left[-\frac{1}{\ln t} \left(\ln t\right)^{-1}\right]_1^+ = \frac{1}{\ln 2}$ qui converge.

d) On a vu deux cas de série de nature différente pour lesquels la règle de Raabe-Dubanel possède le même paramètre $\mu=1$: On ne pourra pas conclure par la règle de Raabe-Dubanel si $\mu=1$.

4) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + r_n$ avec $\sum r_n$ absolument convergente.



a) $\delta_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ $\delta_n = \delta_{n+1} - \delta_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n})$

Donc $\delta_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$: $\sum \delta_n$ absolument convergente

Ainsi: $\sum (\delta_{n+1} - \delta_n)$ est convergente i.e. $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Soit γ sa limite.

On a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma + o(1)$ i.e. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$

b) $r_n = \left(n - \frac{1}{n}\right)^2 = n^2 - \frac{2}{n}n + \frac{1}{n^2}$ or $n^2 = o(n)$ et $\frac{2}{n}n = o(n)$ puisque $\sum n$ ACV

Donc $\sum n^2$ et $\sum \frac{2}{n}n$ sont absolument convergents.

De plus $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum r_n$ converge

$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n} + r_n\right) = \left(-\frac{1}{n} + r_n\right) - \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{n}\right)^2 + o\left(n - \frac{1}{n}\right)^2$

or $\sum r_n$, $\sum -\frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{n}\right)^2$ sont absolument convergents donc si: $\rho_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) + \frac{1}{n}$, on a

$\sum \rho_n$ absolument convergente et $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -\frac{1}{n} + \rho_n$

c) On passe aux sommes partielles

$\sum_{k=1}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$ i.e. $\ln(u_n) - \ln(u_1) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$

Or: $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o\left(\frac{1}{n}\right)$ $\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = L + o(1)$ où L somme de $\sum \rho_n$

Ainsi: $\ln(u_n) = -\ln(n) + (L + \ln(u_1) - \gamma) + o(1)$: $\ln(u_n) = -\ln(n) + A + o(1)$ où $A \in \mathbb{R}$.

Ainsi: $u_n = \frac{e^{A+o(1)}}{n}$ i.e. $u_n \sim \frac{e^A}{n}$: La série $\sum u_n$ diverge

5) Stirling $u_n = \frac{e^n n!}{n^{3/2} n^n}$

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e(n+1) n^n n^{3/2}}{(n+1)^{n+1} (n+1)^{3/2}} = e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3/2} = \exp\left(1 + (-n)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3/2}$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3/2} = \left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

b) On est dans le cadre du 4). Donc il existe $k > 0$ / $u_n \sim \frac{k}{n}$

c) $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \cos t dt = \left[-\cos t \sin^{n+2} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t (1 - \sin^2 t) dt = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$

On a donc $\forall p \in \mathbb{N}$ $I_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p}$ donc $I_{2p} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{(2k+1)(2k+2)}{(2k+2)^2} I_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$

Donc $I_{2(p+1)+1} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1}$ donc $I_{2p+1} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{(2k+2)^2}{(2k+2)(2k+3)} I_1 = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \frac{\pi}{2}$

$u_n = n I_n I_{n+1}$ $u_{2p} = \frac{2p}{2p+1} \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $u_{2p+1} = \frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2} \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\frac{\pi}{2}$

d) $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t$. Donc (I_n) décroissante. $\sin^n$ est continue positive non identiquement nulle donc $I_n > 0$.

$I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$ donc $n I_n I_{n+1} \leq n I_n^2 \leq n I_n I_{n+1}$ i.e. $u_n \leq n I_n^2 \leq \frac{n}{n-1} u_{n-1}$: $n I_n^2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ i.e. $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$

e) $I_{2n}^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ $I_{2n}^2 = \left(\frac{(2n)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}\right)^2 \sim \left(k \frac{(2n)^{2n}}{\sqrt{2n}}\right)^2 \times \frac{e^{-2n}}{2n} = \frac{2}{n^2} \frac{\pi^2}{2n}$ Donc $k = \sqrt{2\pi}$

PROBLEME II : Répartition des nombres premiers

$\pi(n)$ nombre de nombres premiers dans $[0, n]$. $\mathcal{P}$ ensemble des nombres premiers. On veut établir $\ln 2 \frac{n}{\ln n} \leq \pi(n) \leq e \frac{n}{\ln n}$
 $v_p(n)$, valuation p -adique de n est l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n . On rappelle :

$\Leftrightarrow v_p(n)$ est l'unique entier k tel que p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n .

$\Leftrightarrow$ Pour tous n, m entiers et tout $p \in \mathcal{P}$, on a : $v_p(mn) = v_p(n) + v_p(m)$, $v_p(\text{pgcd}(m, n)) = \min(v_p(n), v_p(m))$, $v_p(\text{ppcm}(m, n)) = \max(v_p(n), v_p(m))$

Partie I : Une minoration de la fonction π

On note $\Delta_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$. Pour $1 \leq b \leq a$, on pose : $I(b, a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b} dx$

1. 1.a) Soit a, b entiers tels que $1 \leq b < a$. On a :

$$I(b+1, a) = \int_0^1 x^b(1-x)^{a-b-1} dx = \left[-\frac{(1-x)^{a-b}}{a-b} x^b \right]_0^1 + \frac{b}{a-b} \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b} dx$$

i.e. $I(b+1, a) = \frac{b}{a-b} I(b, a)$.

1.b) Soit la propriété de récurrence : $\mathcal{P}_b : \forall a \in \mathbb{N}, a \geq b \Rightarrow I(b, a) = \frac{1}{b \binom{a}{b}}$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}_1$ est elle vraie ? Soit $a \in \mathbb{N}^*$. $I(1, a) = \int_0^1 (1-x)^{a-1} dx = \left[-\frac{(1-x)^a}{a} \right]_0^1 = \frac{1}{a} = \frac{1}{1 \binom{a}{1}}$. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie

$\Leftrightarrow$ Supposons $\mathcal{P}_b$ vraie. A-t-on $\mathcal{P}_{b+1}$ vraie ? Soit $a \in \mathbb{N}, a \geq b+1$.

On a : $I(b+1, a) = \frac{a}{a-b} I(b, a) = \frac{b}{a-b} \frac{1}{b \binom{a}{b}}$ car $\mathcal{P}_b$ vraie.

Donc $I(b+1, a) = \frac{(a-b)! b!}{(a-b)! a!} = \frac{(a-(b+1))! (b+1)!}{(b+1)! a!} = \frac{1}{(b+1) \binom{a}{b+1}}$ Ainsi $\mathcal{P}_{b+1}$ est vraie.

$\Leftrightarrow$ On a donc montré $\mathcal{P}_1$ vraie et pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_b$ vraie entraîne $\mathcal{P}_{b+1}$ vraie. Donc par théorème de récurrence, on a pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_b$ vraie i.e.

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, b \leq a, I(b, a) = \frac{1}{b \binom{a}{b}}$$

2. 2.a) On utilise la formule du binôme pour $(1-x)^{a-b}$. On obtient alors :

$$I(b, a) = \int_0^1 x^{b-1} \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} x^k dx = \sum_{k=0}^{a-b} \left((-1)^k \binom{a-b}{k} \int_0^1 x^{k+b-1} dx \right).$$

Ainsi $I(b, a) = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}$.

2.b) On a $\frac{\Delta_a}{b \binom{a}{b}} = \Delta_a I(b, a)$. Ainsi, en multipliant l'égalité obtenue ? la question précédente par Δ_a , on a : $\frac{\Delta_a}{b \binom{a}{b}} =$

$$\sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{\Delta_a}{k+b}.$$

Or Δ_a est un multiple de tout entier compris entre 1 et b donc c'est un multiple de tous les $k+b$ lorsque k est un entier compris entre 0 et $a-b$. Ainsi $\frac{\Delta_a}{b \binom{a}{b}}$ est une somme d'entiers et est donc un entier donc

l'entier $b \binom{a}{b}$ divise Δ_a .

3. Soit $n \geq 1$ un entier.

3.a) Δ_{k+1} est un multiple de tous les entiers compris entre 1 et $k+1$ donc c'est un multiple de tous les entiers compris entre 1 et k donc du plus petit des multiples de tous les entiers compris entre 1 et k i.e. pour tout $k \geq 1$, Δ_k divise Δ_{k+1} .

D'après la question précédente, $n \binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n} qui divise lui-même Δ_{2n+1} . De même $(2n+1) \binom{2n}{n} = (n+1) \binom{2n+1}{n+1}$ divise Δ_{2n+1} .

Ainsi **les entiers $n \binom{2n}{n}$ et $(2n+1) \binom{2n}{n}$ divisent Δ_{2n+1}** .

3.b) On a $(2n+1) - 2n = 1$ donc d'après le th. de Bezout, **$(2n+1)$ et n sont premiers entre eux**

On note J_n le quotient de Δ_{2n+1} par $\binom{2n}{n}$. Comme $n \binom{2n}{n}$ et $(2n+1) \binom{2n}{n}$ divisent Δ_{2n+1} , on en déduit que n et $2n+1$ divisent l'entier J_n . Donc comme n et $2n+1$ sont premiers entre eux, on en déduit d'après un corollaire du th. de Bezout que $n(2n+1)$ divise J_n . Ainsi **l'entier $n(2n+1) \binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}**

3.c) Soit $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

$\Leftrightarrow$ si $k = n$. On a directement $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$

$\Leftrightarrow$ si $k < n$. On a $\binom{2n}{n} = \frac{(2n) \times (2n-1) \times \dots \times (2n-(k-1)) \times (2n-k) \times \dots \times n}{1 \times 2 \times \dots \times k \times (k+1) \times \dots \times (n+1)}$. Donc

$$\binom{2n}{n} = \binom{2n}{k} \times \frac{2n-k}{k+1} \times \frac{2n-k-1}{k+2} \times \dots \times \frac{n}{n+1} \geq \binom{2n}{k}$$

car tous les $\frac{2n-k-i}{k+1+i}$ sont supérieurs à 1 lorsque i décrit $\llbracket 0, n-k \rrbracket$.

Ainsi dans ce cas $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.

$\Leftrightarrow$ si $k > n$. On a $\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}$ avec $2n-k < n$ et donc d'après le point précédent, $\binom{2n}{2n-k} \leq \binom{2n}{n}$
i.e. $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$

Ainsi en regroupant tous les cas, **$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$** .

3.d) On a $4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{n} = (2n+1) \binom{2n}{n}$. Ainsi **$(2n+1) \binom{2n}{n} \geq 4^n$** .

3.e) Comme $n(2n+1) \binom{2n}{n}$ divise l'entier positif Δ_{2n+1} , on a $n(2n+1) \binom{2n}{n} \leq \Delta_{2n+1}$. Ainsi, d'après l'inégalité obtenue à la question précédente, on a : **$\Delta_{2n+1} \geq n4^n$** .

3.f) Soit n un entier supérieur ou égal à 9.

$\Leftrightarrow$ Si n est impair. On l'écrit sous la forme $n = 2p+1$ avec p un entier $p \geq 4$. On a $\Delta_n = \Delta_{2p+1} \geq p4^p \geq 2 \times 2^{2p} = 2^{2p+1} = 2^n$

$\Leftrightarrow$ Si n est pair. On l'écrit sous la forme $n = 2p+2$ avec p un entier $p \geq 4$. On a $\Delta_n = \Delta_{2p+2} \geq \Delta_{2p+1} \geq p4^p \geq 4 \times 4^p = 2^{2p+2} = 2^n$

Ainsi **$\forall n \geq 9, \Delta_n \geq 2^n$**

Par ailleurs : $\Delta_7 = \text{ppcm}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) = 4 \times 3 \times 5 \times 7 = 4 \times 105 \geq 4 \times 32 = 2^7$ et $\Delta_8 = 8 \times 3 \times 5 \times 7 = 8 \times 105 \geq 8 \times 32 = 2^8$. Ainsi **$\forall n \geq 7, \Delta_n \geq 2^n$**

4. Soit $n \geq 1$ un entier.

4.a) Soit $p \in \mathcal{P}$. Par propriété des valuations, la valuation p -adique d'un ppcm est le maximum des valuations p -adiques des entiers concernés, donc **$v_p(\Delta_n) = \max(v_p(1), v_p(2), \dots, v_p(n))$** .

Ainsi $p^{v_p(\Delta(n))}$ divise l'un des entiers $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc **$p^{v_p(\Delta(n))} \leq n$** .

4.b) De l'inégalité précédente, on déduit que pour tout nombre premier $p > n$, $v_p(\Delta(n)) = 0$. Ainsi, dans la décomposition $\Delta(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(\Delta(n))}$, les contributions des nombres premiers $p > n$ valent 1 et donc on peut ne considérer

que les nombres premiers inférieurs ou égaux à n : **$\Delta_n = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p^{v_p(\Delta(n))}$** .

4.c) On en déduit que $\Delta(n)$ est le produit de $\pi(n)$ entiers naturels de la forme $p^{v_p(\Delta_n)}$ qui sont tous inférieurs ou égaux à n . Ainsi $\Delta_n \leq n^{\pi(n)}$.

5. 5.a) Soit $n \geq 7$. En regroupant les résultats de la question 3.f) et 4.c), on obtient $n^{\pi(n)} \geq \Delta(n) \geq 2^n$ i.e. $\pi(n) \ln(n) \geq n \ln(2)$ et donc $\pi(n) \geq \ln 2 \frac{n}{\ln n}$.

n	2	3	4	5	6
$\pi(n)$	1	2	2	3	3
5.b) $\ln(2) \frac{n}{\ln(n)}$	2	$\frac{\ln(8)}{\ln(3)} < \frac{\ln(9)}{\ln(3)} = 2$	2	$\frac{\ln(32)}{\ln(5)} < \frac{\ln(125)}{\ln(5)} = 3$	$\frac{\ln(64)}{\ln(6)} < \frac{\ln(216)}{\ln(6)} = 3$
$\pi(n) \geq \ln(2) \frac{n}{\ln(n)}$	Faux	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie

Ainsi $\forall n \geq 3, \pi(n) \geq \ln 2 \frac{n}{\ln n}$

Partie II : Une majoration de la fonction π

1. On cherche dans cette question à majorer simplement le produit $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p$ en fonction de l'entier $n \geq 1$.

1.a) Soient a, b deux entiers tels que $0 < \frac{b}{2} \leq a < b$.

$a! \times \binom{b}{a} = (b-a+1) \times \cdots \times b = \prod_{k=b-a+1}^b k$ donc c'est est un multiple de $\prod_{k=a+1}^b k$ car $\llbracket a+1, b \rrbracket \subset \llbracket b-a+1, b \rrbracket$ puisque $0 < \frac{b}{2} \leq a < b$.

Soit alors p un nombre premier dans $]a, b]$. On a $p \in \llbracket a+1, b \rrbracket$ donc $p \in \llbracket b-a+1, b \rrbracket$ donc p divise $\prod_{k=b-a+1}^b k = a! \times \binom{b}{a}$. Or p est premier avec $a!$. Donc par le lemme de Gauss, p divise $\binom{b}{a}$.

Ceci étant vrai pour tout nombre premier inclus dans $]a, b]$, on a

$$\prod_{\substack{a < p \leq b \\ p \in \mathcal{P}}} p \text{ divise l'entier } \binom{b}{a}$$

1.b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le résultat précédent ? $b = 2m+1$ et $a = m+1$, cas o ? on a bien $0 < \frac{b}{2} \leq a < b$, on

obtient $\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \text{ divise l'entier } \binom{2m+1}{m+1}$

1.c) Comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on a $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$.

1.d) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Les coefficients binomiaux étant positifs, on a :

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \geq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = 2 \binom{2m+1}{m+1}. \text{ Ainsi } 2^{2m+1} \geq 2 \binom{2m+1}{m+1} \text{ i.e.}$$

$$\binom{2m+1}{m+1} \leq 4^m.$$

1.e) Comme d'apr ?s 1a) $\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq \binom{2m+1}{m+1}$, on déduit de l'inégalité précédente,

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^m.$$

1.f) Soit la propriété de récurrence : $\mathcal{P}_n : \forall k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \prod_{\substack{p \leq k \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^k$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}_1$ est elle vraie ? On a $\prod_{\substack{p \leq 1 \\ p \in \mathcal{P}}} p = 1 \leq 4^1$ et $\prod_{\substack{p \leq 2 \\ p \in \mathcal{P}}} p = 2 \leq 4^2$. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie

⇒ Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \geq 1$. A-t-on $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie? L'inégalité voulue est déjà vérifiée pour tous les entiers k compris entre 1 et $2n$. Il ne reste plus qu'à vérifier que cela reste vrai pour $k = 2n + 1$ et $k = 2n + 2$.

✓ Pour $k = 2n + 1$. On a
$$\prod_{\substack{p \leq 2n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p = \prod_{\substack{p \leq n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \times \prod_{\substack{n+1 < p \leq 2n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p.$$

Or d'après le résultat de la question 1e),
$$\prod_{\substack{n+1 < p \leq 2n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^n.$$

De plus, $n + 1 \leq 2n$ donc
$$\prod_{\substack{p \leq n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^{n+1}. \text{ Ainsi } \prod_{\substack{p \leq 2n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^{n+1} \times 4^n = 4^{2n+1}.$$

✓ Pour $k = 2n + 2$. $2n + 2$ étant un entier pair strictement supérieur à 2, il n'est pas premier. Ainsi
$$\prod_{\substack{p \leq 2n+2 \\ p \in \mathcal{P}}} p = \prod_{\substack{p \leq 2n+1 \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^{2n+1} \leq 4^{2n+2}$$

Ainsi, on a bien établi $\forall k \in [1, 2n + 2], \prod_{\substack{p \leq k \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^k$ i.e. $\boxed{\mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie}}.$

⇒ On a donc montré $\mathcal{P}_1$ vraie et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ vraie entraîne $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie. Donc par théorème de récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ vraie.

En particulier, on a établi
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p \leq 4^n}$$

2. 2.a) Montrer que pour tout $m \geq 1$, $m! \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m$.

Soit la propriété de récurrence : $\mathcal{P}_m$: " $m! \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m$ "

⇒ $\boxed{\mathcal{P}_1 \text{ est clairement vraie}}$ car $1! = 1 \geq \frac{1}{e}$

⇒ Supposons $\mathcal{P}_m$ vraie pour un certain $m \geq 1$. A-t-on $\mathcal{P}_{m+1}$ vraie?

On a $(m + 1)! = m! \times (m + 1) \geq \frac{(m + 1)}{e^m} \times m^m$.

Or $\frac{m^m}{(m + 1)^m} = \exp\left(-m \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right).$

Mais pour tout $x \geq 0$, $\ln(1 + x) \leq x$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) \leq \frac{1}{m}$ et donc $-m \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) \geq -1$. Ainsi $\frac{m^m}{(m + 1)^m} \geq$

$\frac{1}{e}$ i.e. $m^m \geq \frac{(m + 1)^m}{e}.$

Ainsi, $(m + 1)! \geq \frac{(m + 1)}{e^m} \times m^m \geq \frac{(m + 1)^{m+1}}{e^{m+1}}$ i.e. $\boxed{\mathcal{P}_{m+1} \text{ est vraie}}.$

⇒ On a donc montré $\mathcal{P}_1$ vraie et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_m$ vraie entraîne $\mathcal{P}_{m+1}$ vraie. Donc par théorème de récurrence, on a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_m$ vraie, i.e. $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, m! \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m}$

2.b) Soit $n \geq 2$. En constatant que le k -ième nombre premier, que l'on notera p_k , est toujours supérieur à k , on a

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p = \prod_{k=1}^{\pi(n)} p_k \geq (\pi(n))!.$$

Ainsi, en utilisant les inégalités précédentes, on a donc $4^n \geq \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathcal{P}}} p \geq (\pi(n))! \geq \left(\frac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)}$ donc $\boxed{4^n \geq \left(\frac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)}}$

En prenant le logarithme de cette relation, on en déduit $\boxed{\pi(n) \ln(\pi(n)) - \pi(n) \leq n \ln 4}.$

3. On suppose qu'il existe un entier $n_0 \geq 3$, tel que : $\pi(n_0) > e \frac{n_0}{\ln n_0}$.

3.a) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x \ln x - x$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \in [1, +\infty[, f'(x) = \ln x$ ce qui est positif sur $[1, +\infty[$ et n'est nul qu'en 1.

Ainsi $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [1, +\infty[}.$

En appliquant ce résultat à l'inégalité $\pi(n_0) > e \frac{n_0}{\ln n_0}$, on a $f(\pi(n_0)) > f\left(\frac{n_0}{\ln n_0}\right)$. Or pour tout $n \geq$

$2, f(\pi(n)) \leq n \ln 4$, donc on obtient $n_0 \ln 4 > e \frac{n_0}{\ln n_0} \ln\left(e \frac{n_0}{\ln n_0}\right) - e \frac{n_0}{\ln n_0}$

soit $n_0 \ln 4 > e n_0 - e n_0 \frac{\ln(\ln n_0)}{\ln n_0}$ i.e. $n_0 (\ln 4 - n_0) > -e n_0 \frac{\ln(\ln n_0)}{\ln n_0}$. Ainsi

$$\frac{e - \ln 4}{e} < \frac{\ln(\ln n_0)}{\ln n_0}$$

3.b) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln x}{x}$. On a g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$ et $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. On en déduit que g est majorée par $g(e) = \frac{1}{e}$. Ainsi $\frac{e - \ln 4}{e} < \frac{\ln(\ln n_0)}{\ln n_0} \leq \frac{1}{e}$ donc $\frac{e - \ln 4}{e} < \frac{1}{e}$. Mais ceci faux car $e > 2.5 > 1.5 > \ln 4$ donc $e - \ln 4 > 1$.

Ainsi par l'absurde, on a bien établi

$$\forall n \geq 3, \pi(n) \leq e \frac{n}{\ln n}.$$