

Programme de Colle - Semaine n° 03*Du 28 septembre 2026 au 02 octobre 2026***Séries de réels ou de complexes**

Tout type d'exercices

Familles sommables

- ⇒ Familles sommables de réels positifs : définition, opérations
- ⇒ Sommation par paquets, théorème de Fubini. Cas des séries doubles.

Structures algébriques usuelles**Groupes**

Rappel

Anneaux et corps

- ⇒ Anneaux, produit fini d'anneaux, sous-anneaux, morphisme d'anneaux, noyau et image d'un morphisme d'anneau. Calculs dans un anneau (formule du binôme, identité $a^n - b^n$)
- ⇒ Groupe des inversibles d'un anneau.
- ⇒ Anneau intègre, corps, sous-corps

Idéaux et divisibilité

- ⇒ Idéaux d'un anneau commutatif, le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal. Somme et intersection d'idéaux.
- ⇒ Idéal engendré par un élément
- ⇒ Divisibilité dans un anneau intègre. $x \mid y \iff yA \subset xA$
- ⇒ Idéaux de $\mathbb{Z}$
- ⇒ Groupe des inversibles d'un anneau.
- ⇒ Anneau intègre, corps, sous-corps

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- ⇒ Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$. Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est un nombre premier.
- ⇒ Théorème chinois : pour $n \wedge m = 1$, $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Applications aux systèmes de congruence.
- ⇒ Fonction indicatrice d'Euler φ . Calcul de $\varphi(n)$ pour $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_q^{\alpha_q}$.
- ⇒ Théorème d'Euler, petit théorème de Fermat.
- ⇒ Arithmétique dans $\mathbb{Z}$, Lien avec les idéaux.

Anneau $\mathbb{K}[X]$ et arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

- ⇒ Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.
- ⇒ Relation de Bezout, lemme de Gauss.
- ⇒ Polynômes irréductibles.

Exercices et Questions de cours

1. Une suite d'entiers convergente est stationnaire
2. Image directe et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe
3. Montrer que $\forall n \geq 0, \frac{1}{\text{ch}(2n+1)} = \sum_{q=0}^{\infty} 2(-1)^q e^{-(2n+1)(2q+1)}$
 En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\text{sh}(2n+1)}$
4. Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$: définition, cyclicité, générateurs
5. *Pour les élèves des groupes 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 uniquement* Théorème de Lagrange (sur le cardinal des sous-groupes)
6. Existence d'un réel γ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ (Constante d'Euler)
7. Idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$
8. Idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$
9. $\bar{k}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi $k \wedge n = 1$
10. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier
11. Fonction indicatrice d'Euler : définition, propriété...
12. Théorème chinois

13. BANQUE CCP MP 86

Soit p un nombre premier.

- (a) i. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
 ii. Prouver que $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis que p divise $\binom{p}{k}$.
- (b) i. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p}$. **Indication** : Procéder par récurrence.
 ii. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, p$ ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

14. BANQUE CCP MP 94

- (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
- (b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
 Soit $c \in \mathbb{N}$.
 Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
- (c) On considère le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
 i. Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
 ii. *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S) .

Prochain programme : Algèbre