

REDUCTION EN DIMENSION FINIE

Exercice 1. Diagonalisabilité des endomorphismes $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant dans la base canonique pour matrice :

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 4. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C}^n$. Montrer que : f est diagonalisable sssi f^2 est diagonalisable.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie. Soient u et v deux endomorphismes de E . Soit χ_u le polynôme caractéristique de u . Montrer l'équivalence : $\text{Sp}(u) \cap \text{Sp}(v) = \emptyset \iff \chi_u(v) \in \text{Gl}(E)$

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie. Soient u et v deux endomorphismes de E .

1. On suppose que u et v sont diagonalisables et commutent. Montrer qu'il existe une base de E propre à la fois pour u et pour v
2. On suppose que χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et à racines simples. Montrer que les endomorphismes v qui commutent avec u sont exactement les polynômes en u .

Exercice 5. 1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On suppose que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable. Montrer que $M = \begin{pmatrix} B & 2B \\ 2B & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

On veut montrer que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

1. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Étudier la diagonalisabilité de M .
(b) En déduire qu'il existe $Q \in \text{Gl}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $Q^{-1}BQ = \Delta$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$
2. Montrer l'équivalence recherchée.

Exercice 7. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A . Montrer que A est diagonalisable par deux méthodes : en déterminant une matrice P diagonalisante et une matrice diagonale D semblable à A , et en déterminant le polynôme minimal de A
2. Calculer A^n par deux méthodes : en exprimant A^n en fonction de P et D , et en fonction de A et I_4

Exercice 8. Réduire au mieux les matrices de l'exercice 1

Exercice 9. A quelle condition $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 10. Montrer que $M = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots & b & a & b \\ b & a & b & a & \dots & a & b & a \\ a & b & a & b & \dots & b & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ b & a & b & a & \dots & a & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer que : f est nilpotent si et seulement si $f = 0$

Exercice 12. E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n , f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes et positives.

1. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que f est g commutant. Montrer que tout vecteur propre de f est aussi vecteur propre de g et comparer les valeurs propres.

2. Exemple. Déterminer sous forme $P^{-1}B'P$ les matrices B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 13. Soit $L = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ une matrice ligne non nulle et $A = {}^t L L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice représentant $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Déterminer le rang de u , son image, son noyau, ses sous-espaces et valeurs propres. u est-il diagonalisable ? quel est son polynôme caractéristique ?

Exercice 14. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et n'est pas diagonalisable.

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer χ_A , le polynôme caractéristique de

A . Montrer que : A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples. Chercher la forme des vecteurs propres de ${}^t A$

Exercice 16. Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ ayant A pour matrice dans la base canonique. On note $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ le

polynôme caractéristique de A , et $P_j = \prod_{i=1}^j (X - \lambda_i)$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Justifier l'existence d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de u est de la forme $T =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. Montrer que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $k \in \llbracket 1, j \rrbracket$, $(P_j(u))(e_k) = 0$. En déduire que $P(u) = 0$ puis que $P(A) = 0$.

APPLICATIONS DE LA REDUCTION

Exercice 17. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer A^n puis $\text{Exp}(A)$ de deux façons différentes : sous forme PMP^{-1}

ou sous forme d'une combinaison linéaire de polynômes de A ayant un degré inférieur strictement à celui de Π_A

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer χ_A , en déduire Π_A . A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?
2. Montrer sans calcul que $B = A + I_3$ est nilpotente. En déduire A^p (pour $p \in \mathbb{N}$) et $\text{Exp}(A)$ en fonction de I_3 et $B = A + I_3$.
3. Trigonaliser A .

Exercice 19. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable mais pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminer P inversible telle que $P^{-1}AP = B$. En déduire une matrice D diagonalisable et une matrice N nilpotente telles que $A = D + N$ et $DN = ND$. Déduire de ce qui précède les puissances de A et $\text{Exp}(A)$

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est trigonalisable mais pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
2. Montrer, sans la calculer, qu'il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $B - 2I_2$ soit nilpotente. En déduire les puissances et l'exponentielle de A' en fonction de $N = B - 2I_2$.
3. Déterminer explicitement par le calcul : P, B, A' , les puissances et l'exponentielle de A' .

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Etudier la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 22. α étant un réel non nul, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Etudier la convergence et la limite de la suite de matrices $((A_n)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 23. Soit $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche

$b \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $b \circ b = a$ (ou, ce qui est équivalent, $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$)

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de a . En déduire une base $\mathcal{B}$ propre pour a (ou une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale)
2. Montrer que si $b^2 = a$ alors b commute avec a , puis que $\mathcal{B}$ est encore une base propre pour b . En déduire que, si $B^2 = A$, alors $P^{-1}BP$ est diagonale.
3. Déterminer par leur matrice dans $\mathcal{B}$ tous les endomorphismes b de $\mathbb{R}^3$ tels que $b^2 = a$.

Exercice 24. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que l'équation $B^2 = A$ n'a pas de solution B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
2. L'équation $B^2 = A$ a-t-elle des solutions dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Si oui, les déterminer.

Exercice 25. On cherche à déterminer les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n - 3y_n + 2z_n \\ y_{n+1} &= -x_n + 5y_n - 2z_n \\ z_{n+1} &= -x_n + 3y_n \end{cases}$$

1. Soit U_n la colonne $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.
2. Calculer A^n et en déduire x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0 et z_0 .

Exercice 26. On cherche à déterminer les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+3} = -3x_{n+2} - 3x_{n+1} - x_n$

1. Soit U_n la colonne $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.
2. Calculer A^n et en déduire x_n en fonction de x_0, x_1 et x_2 .

Exercice 27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(\text{Exp}(A)) = \text{Exp}(\text{Tr}(A))$. En déduire que $\text{Exp}(A)$ est une matrice inversible.

Exercice 28. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Montrer que $\mathcal{C}(f) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ f = f \circ u\}$ est une algèbre qui contient $\mathbb{K}[f]$
2. Montrer que si χ_f est scindé à racines simples, alors $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$

Exercice 29. Banque CCP MP

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A .
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)^2$ et en déduire la valeur de A^n .

Exercice 30. commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, supposé diagonalisable. On note $\mathcal{C}_u$ le commutant de u , c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u .

Montrer que $\mathcal{C}_u$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Calculer sa dimension.

Indications : soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de $u \dots etc \dots$ Puis travailler avec la matrice de u dans une base adaptée

Exercice 31. diagonalisation simultanée

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soient u, v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent i.e. $u \circ v = v \circ u$.

Montrer que u et v sont simultanément diagonalisables, autrement dit qu'il existe une base commune de diagonalisation.

Indications : raisonner par récurrence sur la dimension de E .

PRATIQUE DE LA DIAGONALISATION

Exercice 32. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondant. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 33. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A .

Exercice 34. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A . Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 35. On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.

Exercice 36. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ? Justifier. Écrire alors M sous une forme plus simple.

Exercice 37. Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 38. Pour quelles valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{C}^2$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? On ne cherchera pas à réduire explicitement A .

Exercice 39. Soit u l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ u : & & \\ P & \mapsto & (2X + 1)P - (X^2 - 1)P' \end{array}$$

Montrer que u est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de u , et, si c'est possible, diagonaliser u .

Exercice 40. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de A , alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A . De même, montrer que si x est un vecteur propre complexe de A , alors $\bar{x}$ (où $\bar{x}$ désigne le vecteur dont les composantes sont les conjuguées des composantes de x) est aussi un vecteur propre complexe de A .

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 41. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables ? Si oui, les réduire.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 42. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est diagonalisable.

Exercice 43. Soit P_0 un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, et f l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & R = \text{reste de la division euclidienne de } P \text{ par } P_0 \end{array}$$

A l'aide d'un polynôme annulateur de f , montrer que f est diagonalisable.

Exercice 44. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables, sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$? Lorsqu'elles sont diagonalisables, donner une matrice diagonale semblable.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Réduire explicitement A et C .

Exercice 45. Soit $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array} \right)$. Calculer A^2 , puis A^3 . A l'aide d'un polynôme annulateur de A , montrer que A est diagonalisable.

Sans chercher à calculer le polynôme caractéristique de A , donner un ensemble fini contenant toutes les valeurs propres de A , puis donner les valeurs propres elles-mêmes ainsi que leurs multiplicités. En déduire le polynôme caractéristique de A .

Exercice 46. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables, triangularisables?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A l'aide du polynôme caractéristique de B , calculer B^{-1} .

Exercice 47. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application linéaire suivante :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(0)X^3 + P'(0)X^2 + \frac{1}{2}P''(0)X + \frac{1}{6}P'''(0) \end{array}$$

1. Ecrire la matrice A de u dans la base canonique. Calculer A^2 .
2. u est-elle diagonalisable? Si oui, donner une base de $\mathbb{R}_3[X]$ formée de vecteurs propres de u .

EXERCICES DE BANQUE CCINP

EXERCICE 59 algèbre

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

- Démontrer que f est bijectif de deux manières :
 - sans utiliser de matrice de f ,
 - en utilisant une matrice de f .
- Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
- f est-il diagonalisable ?

EXERCICE 67 algèbre

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

EXERCICE 68 algèbre

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
 - sans calcul,
 - en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
 - en utilisant le rang de la matrice,
 - en calculant A^2 .
- On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

EXERCICE 69 algèbre

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

- Déterminer le rang de A .
- Pour quelles valeurs de a , la matrice A est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 70 algèbre

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?
- Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
Déduire de la question 1. les éléments propres de B .

EXERCICE 72 algèbre

Soit n un entier naturel non nul.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n , et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E .

1. Donner le rang de f .
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

EXERCICE 73 algèbre

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(\text{I}_2, A)$.

EXERCICE 88 algèbre

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P .

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, u(M) = M + \text{tr}(M)A$.

- (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u .
- (b) u est-il diagonalisable ?

Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

EXERCICE 91 algèbre

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A .
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)^2$ et en déduire la valeur de A^n .

EXERCICE 93 algèbre

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.

On notera Id l'application identité sur E .

1. Montrer que $\text{Im}u \oplus \text{Ker}u = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
(b) En déduire que $\text{Im}u = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
Déterminer les valeurs propres de u . Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.