# Devoir en temps libre n° 05

Sujet Niveau CCINP - E3A

## Propriétés topologiques de certaines classe de similitude

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, $n$ est un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice identité d'ordre $n$ est notée $I_n$, et $GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire lorsqu'elle est de la forme $\lambda I_n$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
La topologie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est définie à l'aide de l'une quelconque de ses normes équivalentes.
Pour une matrice $M$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle classe de similitude de $M$ l'ensemble $\mathscr{S}(M)$ constitué de toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont semblables à $M$ :

$$\mathscr{S}(M) = \left\{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{K})\right\}.$$

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés topologiques des classes de similitude des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

## Partie I : le cas des matrices d'ordre 2

**1.** Déterminer la classe de similitude d'une matrice scalaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

**2.** Pour tout $k \in \mathbb{K}$, on pose $E_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{K}$, les matrices $E_k$ et $F_k$ sont inversibles et déterminer leurs inverses.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{K}$, les matrices $E_k A E_k^{-1}$ et $F_k A F_k^{-1}$.

(c) Montrer que la classe de similitude de $A$ est bornée si, et seulement si, $A$ est une matrice scalaire.

Dans la suite de cette partie, on fixe une matrice $A$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ et on cherche à quelle condition sa classe de similitude est fermée.

3. On suppose dans cette question que $A$ a deux valeurs propres distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$ dans $\mathbb{K}$.
Soit $(M_k)_{k\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
   (a) Soit $i \in \{1,2\}$. En considérant la suite $(\det(M_k - \lambda_i I_2))_{k\geqslant 0}$, montrer que $\det(B - \lambda_i I_2) = 0$.
   (b) En déduire que $B \in \mathscr{S}(A)$ et conclure que $\mathscr{S}(A)$ est fermée.

4. On suppose dans cette question que $A$ a une seule valeur propre $\lambda$ dans $\mathbb{K}$ et que $A$ n'est pas une matrice scalaire.
   (a) Montrer que $A$ est trigonalisable, puis qu'elle est semblable à toute matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$.
   (b) En déduire que la classe de similitude de $A$ n'est pas fermée.

5. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donner une condition nécessaire et suffisante simple portant sur $A$ pour que $\mathscr{S}(A)$ soit fermée.

6. Dans cette question, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que le spectre réel de $A$ est vide si, et seulement si, $4\det(A) - (\mathrm{tr}(A))^2 > 0$.
   Dans la suite de la question 6., on suppose cette condition réalisée.
   (b) On note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2)$ est $A$. Montrer que $(\, e_1, u(e_1)\,)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que la matrice de $u$ dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

   (c) Soit $(M_k)_{k\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $B$ a à la fois la même trace et le même déterminant que $A$. En déduire que $\mathscr{S}(A)$ est fermée.

7. Conclure sur l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont la classe de similitude est fermée.

## Partie II : matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est bornée

1. Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$. Montrer que si, pour tout $x \in \mathbb{K}^n, x$ et $u(x)$ sont liés, alors $u$ est une homothétie. On pourra raisonner avec la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ et considérer $u(e_1 + e_i)$ pour $i \in [\![2, n]\!]$.
2. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui n'est pas une matrice scalaire et $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé. Montrer qu'il existe un vecteur $x$ de $\mathbb{K}^n$ tel que la famille $(x, u(x))$ est libre. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans la laquelle la matrice de $u$ a pour première colonne $(0, \alpha, 0, \ldots, 0)^T$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la classe de similitude d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ soit bornée.
4. Existe-t-il une norme $\|.\| sur \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ invariante par similitude, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \left\|PMP^{-1}\right\| = \|M\| ?$$

Partie III : matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est fermée
Dans cette section, $A$ désigne une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose dans cette question que $A$ est diagonalisable. Soit $(M_k)_{k \geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que l'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to \mathbb{C}_n[X] \\ M & \mapsto \chi_M(X) \end{array} \right.$, qui à tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ associe son polynÃ´me caractéristique, est continue.
   (b) Montrer que tout polynÃ´me annulateur de $A$ annule aussi $B$. En déduire que $B$ est diagonalisable.
   (c) Conclure que $\mathscr{S}(A)$ est fermée.
2. On suppose dans cette question que $\mathscr{S}(A)$ est fermée. On note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à $A$, et on considère une base $(b_1, b_2 \ldots, b_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de $u$ est triangulaire supérieure. On notera $T = (t_{i,j,})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ cette matrice.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathscr{B}_k = \left(b_1, \frac{b_2}{k} \ldots, \frac{b_n}{k^{n-1}}\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et écrire la matrice de $u$ dans cette base en fonction des coefficients de $T$.
   (b) En déduire que $A$ est diagonalisable.

## Partie IV : une classe de similitude est toujours d'intérieur vide

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On pose $\mathscr{T} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(A)\}$.
   Quelle est la structure de $\mathscr{T}$ ? Montrer que $\mathscr{T}$ est d'intérieur vide.
2. En déduire que $\mathscr{S}(A)$ est d'intérieur vide.