Devoir surveillé n° 05 (4 heures)

Sujet Niveau Mines - Centrale

Ce devoir est constitué de deux petits problemes.
Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. On veillera également à l'indentation des scripts Python. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.
La calculatrice est interdite.

PROBLEME I

Opérateur de moyenne

Soit $\mathscr{C}^0$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ qui sont continues et $1-$périodiques. Cet espace est normé par $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$
On désigne par e_0 la fonction constante égale à 1 et D le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0$ engendré par e_0.
Pour tout $f \in \mathscr{C}^0$, on note Tf l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, Tf(x) = \dfrac{1}{2}\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right)$.
On s'intéressera par la suite à l'application T suivante : $T : f \in \mathscr{C}^0 \longmapsto Tf$.
L'objet du problème est l'étude des propriétés, en particulier spectrales, de certaines restrictions de T à des sous-espaces invariants de $\mathscr{C}^0$.

Partie I : Préliminaires

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0$.

2. Montrer que pour tout élément f de $\mathscr{C}^0$, on a l'inégalité : $\|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
Si on note $S_1 = \left\{f \in \mathscr{C}^0, \|f\|_\infty = 1\right\}$, déterminer $\sup\limits_{f \in S_1} \|Tf\|_\infty$

On appelle H^0 l'hyperplan de $\mathscr{C}^0$ des fonctions f telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$

3. Montrer que H^0 est stable par T et que $\mathscr{C}^0 = D \oplus H^0$

4. Expliciter la projection P sur D parallèlement à H^0.

5. Soit $f \in \mathscr{C}^0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T^n(f)(x) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\dfrac{x+k}{2^n}\right)$

Partie II : Fonctions trigonométriques

Pour tout entier relatif k, on note $e_k(x) = e^{2ik\pi x}$. On a ainsi que e_k est continue et $1-$périodique, c'est-à-dire que e_k appartient à $\mathscr{C}^0$.
Pour tout entier naturel n, on désigne par E_n le sous-espace de $\mathscr{C}^0$ engendré par $e_0, e_1, e_{-1}, \ldots, e_n, e_{-n}$.

6. Déterminer Te_k pour tout entier relatif k et en déduire que les espaces E_n sont stables par T

7. Déterminer $P(e_k)$ pour tout entier relatif k et en déduire que les espaces E_n sont stables par P

On note T_n (respectivement P_n), l'endomorphisme de E_n induit par T (respectivement par P)

8. Calculer les valeurs propres de T_2. L'endomorphisme T_2 est-il diagonalisable ?

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k l'unique entier tel que $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$. Montrer, pour tout entier $p \geqslant k$, l'identité suivante : $T_n^p = P_n$

Partie III : Fonctions holderiennes

Soit $\alpha \in]0,1[$. On appelle $\mathcal{C}^\alpha$ le sous-espace de $\mathscr{C}^0$ des fonctions f telles que $\left\{ \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha};\ (x,y)\in\mathbb{R}^2, x\neq y \right\}$ soit majoré. On notera alors : $m_\alpha(f) = \sup \left\{ \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha};\ (x,y)\in\mathbb{R}^2, x\neq y \right\}$

10. Etablir que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left|e^{ix}-e^{iy}\right| \leqslant |x-y|$. En déduire que les e_k sont tous dans $\mathcal{C}^\alpha$

11. On pose, pour $f\in\mathcal{C}^\alpha$, $\quad \|f\|_\alpha = m_\alpha(f) + \|f\|_\infty$.
Montrer que $\|.\|_\alpha$ définit une norme sur $\mathcal{C}^\alpha$

12. Montrer que $\mathcal{C}^\alpha$ est stable par T.
On notera T_α l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\alpha$ induit par T.

13. Montrer que, pour tout $f\in\mathcal{C}^\alpha$, $\quad \|T_\alpha(f)\|_\alpha \leqslant \|f\|_\alpha$.
En notant S_α la sphère unité de $\mathcal{C}^\alpha$ pour la norme $\|.\|_\alpha$, déterminer $\sup\limits_{f\in S_\alpha} \|T_\alpha(f)\|_\alpha$

PROBLEME II

Inégalités de Holder et de Minkowski

Dans tout le problême, on fixe p dans $]1,+\infty[$ et on pose $q = \dfrac{p}{p-1}$. Par commodité, on estime que le nombre 0^p est bien défini et vaut 0.

Partie I : Norme sur $\mathbb{R}^n$

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geqslant 2$. Pour tout élément $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$\| x \|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

et on définit $\| x \|_q$ de manière analogue.

1. Montrer que la fonction $\| \ \|_p$ est une application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^+$, qu'elle vérifie l'axiome de séparation et l'axiome d'homogènéité.

2. Vérifier que q est dans $]1,+\infty[$ et qu'il vérifie l'égalité : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

3. 3.a) Montrer que la fonction $-\ln$ est convexe sur $]0,+\infty[$.

En déduire que : $\forall (a,b) \in (]0,+\infty[)^2, \ln(ab) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q\right)$

3.b) Etablir alors *l'inégalité de Young* : $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad |\alpha\beta| \leqslant \dfrac{|\alpha|^p}{p} + \dfrac{|\beta|^q}{q}$

4. Soient $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Montrer *l'inégalité de Hölder* : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \| x \|_p \, \| y \|_q$.

Pour cela, on appliquera le résultat de la question précédente aux nombres x_k/X et y_k/Y pour des choix habiles de X et Y.

5. Soient $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

5.a) Montrer la majoration : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k| \times |x_k + y_k|^{p-1} \leqslant \| x \|_p \times \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/q}$

5.b) Majorer de même : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |y_k| \times |x_k + y_k|^{p-1}$

5.c) En déduire *l'inégalité de Minkowski* : $\| x + y \|_p \leqslant \| x \|_p + \| y \|_p$

5.d) Conclure.

6. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\| x \|_p$ tend vers $\| x \|_\infty$ lorsque p tend vers $+\infty$

Partie II : Norme sur un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Maintenant , on note ℓ^p l'ensemble des suites réelles $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum |u_k|^p$ soit convergente. Pour toute suite u de ℓ^p, on pose $N_p(u) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p \right)^{1/p}$

7. Montrer que ℓ^p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

8. Montrer que N_p est une norme sur ℓ^p

9. Soient $u \in \ell^p$ et $v \in \ell^q$. Montrer que la série $\sum |u_k v_k|$ est convergente et prouver la majoration $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leqslant N_p(u) N_q(v)$

Partie III : Norme sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

Dans cette partie on considère a, b réels tels que $a < b$ et on note $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$.

Pour f dans E, on note $N_p(f) = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$ et $N_q(f) = \left(\int_a^b |f(t)|^q \, dt\right)^{1/q}$

10. Montrer que la fonction N_p est une application de E vers $\mathbb{R}^+$, qu'elle vérifie l'axiome de séparation et l'axiome d'homogènéité.

11. Soient f et g deux éléments de E vérifiant $N_p(f) > 0$ et $N_q(g) > 0$. On pose les fonctions normalisées F et G définies sur $[a,b]$ par

$$F(t) = \frac{|f(t)|}{N_p(f)} \quad \text{et} \quad G(t) = \frac{|g(t)|}{N_q(g)}$$

11.a) Montrer que $\forall t \in [a,b],\ F(t)G(t) \leqslant \dfrac{(F(t))^p}{p} + \dfrac{(G(t))^q}{q}$

11.b) En déduire $\int_a^b F(t)G(t)\,dt \leqslant 1$ puis que $\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leqslant N_p(f)N_q(g)$

12. En déduire que N_p est une norme sur E.

13. Soit $f \in E$. Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} N_p(f) = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$

OPERATEUR DE MOYENNE

$Tf : x \in \mathbb{R} \to \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$ $\quad \mathcal{C}^0 = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ 1\text{-périodique}\}$ $\quad e_0 : x \in \mathbb{R} \to 1$

Partie I 1) • Par linéarité de l'évaluation, T est linéaire.

• De plus par composition et par continuité de $x \to \frac{x}{2}$ et $x \to \frac{x+1}{2}$, si f continue, Tf aussi.

• Enfin si f est 1-périodique, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $Tf(x+1) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x+2}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

Donc Tf est 1-périodique

Ainsi : **T est bien un endomorphisme de $\mathcal{C}^0$**

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. $|Tf(x)| = \left|\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leq \|f\|_\infty$

Donc en passant à la borne sup, on a $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ (*)

Par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, on a T continue.

D'après (*) on a $\sup_{f \in S_1} \|Tf\|_\infty \leq 1$. Mais $\|e_0\|_\infty = 1$ et $\|Te_0\|_\infty = \|e_0\|_\infty = 1$

Donc **$\sup_{f \in S_1} \|Tf\|_\infty = 1$**

3) $H^0 = \left\{f \in \mathcal{C}^0 \mid \int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\}$

(i) Soit $f \in H^0$. On a $\int_0^1 Tf(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 f\left(\frac{x+1}{2}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(u)\,du + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(u)\,du$

Donc $\int_0^1 Tf(x)\,dx = \int_0^1 f(u)\,du = 0$. Comme on a $Tf \in \mathcal{C}^0$, on a donc $Tf \in H^0$

Ainsi : **H^0 stable par T**

(ii) • Soit $f \in \mathcal{C}^0$. Soit $a = \int_0^1 f(t)\,dt$. On pose $g = f - a e_0$. On a $g \in H^0$ et $(a)e_0 \in D$

donc $\mathcal{C}^0 \subset D + H^0$. On a D et H^0 sont de $\mathcal{C}^0$ d'où l'égalité

(iii) Soit $f \in D \cap H^0$. Il existe $a \in \mathbb{C}$ / $f = a e_0$. Donc $\int_0^1 f(t)\,dt = a\int_0^1 1\,dt = a$

or $f \in H^0$ donc $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. Ainsi $a = 0$ et donc $f = 0_{\mathcal{C}^0}$.

Ainsi D et H^0 sont en somme directe.

D'où **$\mathcal{C}^0 = D \oplus H^0$**

4) D'après le point (ii) de la question 3 on a que si $f \in \mathcal{C}^0$, $h : \int_0^1 f(t)\,dt\, e_0 \in D$ et $f - h \in H^0$

Donc par unicité de la décomposition,

le projecteur p est l'application $p : f \in \mathcal{C}^0 \to \int_0^1 f(t)\,dt\, e_0$

5) En écrivant $T^{n+1}(f) = T(T^n(f))$ on montre par récurrence immédiate que

$\forall f \in \mathcal{C}^0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$

Partie II Fonctions trigonométriques $e_k : x \to \exp(i\pi k x)$

6) Soit $k \in \mathbb{Z}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $Te_k(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ik\pi x} + e^{ik(x+1)\pi}\right) = \frac{e^{ik\pi x}}{2}\left(1 + e^{ik\pi}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ impair} \\ e^{ik\pi x} \text{ si } k \text{ pair} \end{cases}$

Ainsi **$Te_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ impair} \\ e_{k/2} \text{ si } k \text{ pair} \end{cases}$**

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![-n, n]\!]$, $Te_k \in E_n$. Comme $(e_k)_{-n \leq k \leq n}$ engendre E_n, **E_n stable par T**

7) Soit $k \in \mathbb{Z}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(e_k)(x) = \left(\int_0^1 e^{2ik\pi x}dx\right) e_0(x)$. Or si $k=0$, $\int_0^1 e^{2ik\pi x}dx = 1$ et si $k \neq 0$, $\int_0^1 e^{2ik\pi x}dx = 0$

Donc $P(e_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq 0 \\ e_0 \text{ si } k = 0 \end{cases}$. En de la façon qu'au 6), E_n est stable par P

$T_n = T_{|E_n}$ et $P_n = P_{|E_n}$

8) On constate d'abord que $(e_0, e_1, e_{-1}, e_2, e_{-2})$ est une base de E_2.

En effet si $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{-1}, \lambda_2, \lambda_{-2}) \in \mathbb{C}^5$ vérifie $\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_{-1} e_{-1} + \lambda_2 e_2 + \lambda_{-2} e_{-2} = 0$

On a en dérivant 0, 1, 2, 3 et 4 fois et en évaluant en 0, $\forall p \in [\![0,4]\!]$, $\sum_{k=-2}^{2} \lambda_k k^p = 0$

ie $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 16 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_{-1} \\ \lambda_2 \\ \lambda_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Donc $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{-1}, \lambda_{-2}) = (0,0,0,0,0)$ car la matrice est inversible (matrice de Vandermonde)

Donc $(e_0, e_1, e_{-1}, e_2, e_{-2})$ libre

Or elle engendre E_2 donc $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_{-1}, e_2, e_{-2})$ est une base de E_2.

La matrice de T_2 dans cette base est $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (car $T_2(e_0) = e_0$, $T_2(e_1) = T_2(e_{-1}) = 0$, $T_2(e_2) = e_1$, $T_2(e_{-2}) = e_{-1}$)

Ainsi $\chi_{T_2} = X^4(X-1)$: $Sp(T_2) = \{0,1\}$

Mais $X(X-1)$ n'annule pas T_2 car $A_2^2 - A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, (ou $T_2^2(e_2) - T_2(e_2) = -e_1 \neq 0$)

Donc Π_{T_2} n'est pas scindé à racines simples : T_2 n'est pas diagonalisable

9) Soit, pour $p \in \mathbb{N}^*$, la propriété de récurrence : $\mathcal{R}_p$: "$T^p e_0 = e_0$ et $\forall j \in [\![1-2^p, 2^{p-1}]\!] \setminus \{0\}$, $T^p(e_j) = 0$"

* $\mathcal{R}_1$ est vraie car $T(e_0) = e_0$, $T(e_1) = 0 = T(e_{-1})$

* Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{R}_p$ vraie. Soit $j \in [\![1-2^{p+1}, 2^{p+1}-1]\!] \setminus \{0\}$

↳ Si j impair on a $T(e_j) = 0$ donc par linéarité de T^p, $T^{p+1}(e_j) = 0$

↳ Si j pair. On l'écrit $j = 2j'$ avec $j' \in [\![1-2^p, 2^p-1]\!] \setminus \{0\}$. $T^{p+1}(e_j) = T^p(T(e_j)) = T^p(e_{j'}) = 0$

De plus $T^{p+1}(e_0) = e_0$ car e_0 invariant par T

Donc $\mathcal{R}_{p+1}$ vraie.

* On a montré $\mathcal{R}_1$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{R}_p$ vraie entraîne $\mathcal{R}_{p+1}$ vraie. Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{R}_p$ vraie

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ / $2^{k-1} \leq n < 2^k$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \geq k$

On a $2^p - 1 \geq n$ donc $\forall j \in [\![-n, n]\!]$, $j \in [\![1-2^p, 2^p-1]\!]$ ainsi avec $\mathcal{R}_p$, $T^p(e_j) = P_n(e_j)$

Ainsi T_n^p et P_n sont des applications linéaires de E_n vers E_n qui coïncident sur une famille génératrice de E_n

donc $T_n^p = P_n$

Rem (comme au 8, on peut aussi établir $(e_0, e_1, e_{-1}, \ldots, e_n, e_{-n})$ libre...)

Partie III Fonctions höldériennes

10) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $|e^{ix} - e^{iy}| = \left|e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x-y}{2}}\right)\right| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|$

Or $\sin$ est 1-lipschitzienne donc $\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq \frac{|x-y|}{2}$. Ainsi $|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x-y|$

11) $\alpha \in]0,1[$, $\mathcal{C}^\alpha = \{f \in \mathcal{C}^0 \mid \exists M > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha\}$ et $m_\alpha(f) = \sup_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq y}} \left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}\right)$

et $\|f\|_\alpha = m_\alpha(f) + \|f\|_\infty$ pour $f \in \mathcal{C}^\alpha$

* Déjà $\|f\|_\alpha$ est bien définie et est positive car $m_\alpha(f)$ existe et est positive et f bornée donc $\|f\|_\infty$ ex. et ≥ 0.

Suite 12

* Séparation : Si f nulle on a directement $\|f\|_\alpha = 0$

• Si : $f \in \mathcal{C}^\alpha$ telle que $\|f\|_\alpha = 0$. Par somme de réels positifs, on en déduit $\|f\|_0 = 0$ et $m_\alpha(f) = 0$

En particulier, comme $\|f\|_0 = 0$ et $\|\cdot\|_\infty$ norme sur $\mathcal{C}^0$, $f = 0_{\mathcal{C}^0} = 0_{\mathcal{C}^\alpha}$

* Homogénéité : Soit $f \in \mathcal{C}^\alpha$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $g = \lambda f$

On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y$, $\left| \frac{g(x)-g(y)}{|x-y|^\alpha} \right| = |\lambda| \left| \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^\alpha} \right|$ donc en passant au sup, $m_\alpha(\lambda f) = |\lambda| m_\alpha(f)$

Par ailleurs $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$

Ainsi : $\|\lambda f\|_\alpha = |\lambda| \|f\|_\alpha$: $\|\ \|_\alpha$ vérifie l'axiome d'homogénéité

* Inégalité triangulaire : Soit $(f,g) \in (\mathcal{C}^\alpha)^2$ $h = f+g$.

On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y$, $\frac{|h(x)-h(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq m_\alpha(f) + m_\alpha(g)$

Donc en passant au sup, $m_\alpha(f+g) \leq m_\alpha(f) + m_\alpha(g)$ } Ainsi :
De plus comme $\|\ \|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}^0$, $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ } $\|f+g\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha$

Ainsi : $\|\ \|_\alpha$ est une norme sur $\mathcal{C}^\alpha$

7a) Soit $f \in \mathcal{C}^\alpha$ et $g = T(f)$. Comme $\mathcal{C}^0$ stable par T, on a déjà $g \in \mathcal{C}^0$

Reste à établir que $\left\{ \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \right\}$ est majorée.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y$. On a $|g(x)-g(y)| = \frac{1}{2} \left| f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f\left(\frac{y+1}{2}\right) \right|$

Donc $|g(x)-g(y)| \leq \frac{1}{2} \left| f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{y}{2}\right) \right| + \frac{1}{2} \left| f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f\left(\frac{y+1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2} m_\alpha(f) \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right|^\alpha + \frac{1}{2} m_\alpha(f) \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right|^\alpha$

i.e $|g(x)-g(y)| \leq \frac{m_\alpha(f)}{2^\alpha} |x-y|^\alpha$

Ainsi : $g \in \mathcal{C}^\alpha$. Donc $\mathcal{C}^\alpha$ stable par T

Remarque les e_q sont dans $\mathcal{C}^\alpha$: Soit $q \in \mathbb{Z}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y$. Soit $j \in \mathbb{Z} / |y-j-x| < 1$

On a $e_q(y-j) = e_q(y)$ par périodicité donc $|e_q(x) - e_q(y)| = |e_q(x) - e_q(y-j)| \leq |x-y+j|$

* Si $j \neq 0$ $|x-y| \geqslant 1$ donc $\frac{|e_q(x)-e_q(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{|x-y+j|}{|x-y|^\alpha} \overset{|j| \geqslant 1}{\leq} |x-y+j| \leq 2q\pi$

* Si $j = 0$ $|e_q(x) - e_q(y)| \leq 2|q| \frac{|x-y|}{|x-y|^\alpha} \leq 2|q|\pi |x-y|^{1-\alpha} \leq 2|q|\pi$. Ainsi $\left\{ \frac{|e_q(x)-e_q(y)|}{|x-y|^\alpha} \mid x \neq y \right\}$ majorée

7b) Soit $f \in \mathcal{C}^\alpha$. On a déjà vu $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y$. $|Tf(x) - Tf(y)| \leq \frac{1}{2} m_\alpha(f) \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right|^\alpha \times 2 \leq \frac{m_\alpha(f)}{2^\alpha} |x-y|^\alpha \leq m_\alpha(f) |x-y|^\alpha$

Donc $\left| \frac{Tf(x)-Tf(y)}{|x-y|^\alpha} \right| \leq m_\alpha(f)$ donc en passant au sup, $m_\alpha(Tf) \leq m_\alpha(f)$

Ainsi : $\|T_\alpha f\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha$

Par ailleurs comme $e_0 \in \mathcal{C}^\alpha$ et $T_\alpha(e_0) = e_0$ on a $\|T_\alpha e_0\|_\alpha = \|e_0\|_\alpha$ avec $e_0 \neq 0$

Ainsi : $\sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^\alpha \\ \|f\|_\alpha = 1}} \|T_\alpha f\|_\alpha = 1$

Normes de Hölder

$p \in]1,+\infty[$, $q = \frac{p}{p-1}$

Partie I norme sur $\mathbb{R}^n$ Si $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{q=1}^n |x_q|^p} = \left(\sum_{q=1}^n |x_q|^p\right)^{1/p}$

1) * Pour $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{q=1}^n |x_q|^p$ est un réel positif donc $\left(\sum_{q=1}^n |x_q|^p\right)^{1/p}$ aussi.

* Si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ on a $\|x\|_p = 0$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ / $\|x\|_p = 0$. On a $\left(\sum_{q=1}^n |x_q|^p\right)^{1/p} = 0$ donc $\sum_{q=1}^n |x_q|^p = 0$. Or une somme de réels positifs est nulle ssi ces réels sont nuls, donc $\forall q \in [\![1,n]\!]$, $x_q = 0$ ie $x = 0_{\mathbb{R}^n}$

* Soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $y = \lambda x = (y_1,\dots,y_n)$

On a $\|y\|_p = \left(\sum_{q=1}^n |\lambda|^p |x_q|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{q=1}^n |x_q|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \, \|x\|_p$: $\|\ \|_p$ vérifie l'homogénéité

2) $q = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{p-1} + 1 > 1$. donc $q \in]1,+\infty[$ $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = \frac{p}{p} = 1$: $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$

3) a) Soit $f_p : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\ln(x)$. f_p est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_p''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$: f_p est convexe

Ainsi : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\forall t \in [0,1]$, $f_p(tx + (1-t)y) \leq t f_p(x) + (1-t) f_p(y)$ (*)

Soit alors $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. En appliquant (*) à $x = a^p$, $y = b^q$, $t = \frac{1}{p}$ (et donc $1-t = \frac{1}{q}$) on a

$$-\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \leq -\frac{1}{p}\ln(a^p) - \frac{1}{q}\ln(b^q) = -\ln(ab).$$

Ainsi : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln(ab) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)$

b) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. * Si α ou β nul. On a bien $|\alpha\beta| \leq \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$

* Si α et β non nuls On applique l'inégalité vue en 3a) avec $a = |\alpha|$ et $b = |\beta|$

On a $\ln|\alpha\beta| \leq \ln\left(\frac{1}{p}|\alpha|^p + \frac{1}{q}|\beta|^q\right)$ donc par croissance de $\exp$, $\boxed{|\alpha\beta| \leq \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}}$

Inégalité de Young

4) Soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$

* Si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ ou $y = 0_{\mathbb{R}^n}$. Alors $\forall q \in [\![1,n]\!]$, $|x_q y_q| = 0$ donc $\sum_{q=1}^n |x_q y_q| \leq \|x\|_p \|y\|_q$

* Sinon on pose $X = \|x\|_p$ et $Y = \|y\|_q$ et $\alpha_q = \frac{x_q}{X}$, $\beta_q = \frac{y_q}{Y}$

On a $|\alpha_q \beta_q| \leq \frac{|\alpha_q|^p}{p} + \frac{|\beta_q|^q}{q}$ donc en sommant pour $q \in [\![1,n]\!]$,

$\sum_{q=1}^n |\alpha_q \beta_q| \leq \frac{1}{p} \sum_{q=1}^n \frac{|x_q|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{q=1}^n \frac{|\beta_q|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Donc $\sum_{q=1}^n |x_q y_q| \leq XY$

ie $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{q=1}^n |x_q y_q| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q}$ Inégalité de Hölder

5) Soit $x = (x_1,\dots,x_n)$ et $y = (y_1,\dots,y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$

5a) On pose $z = \left((x_1+y_1)^{p-1}, (x_2+y_2)^{p-1}, \dots, (x_n+y_n)^{p-1}\right) = (z_1,\dots,z_n)$

Par inégalité de Hölder sur x et z on a $\sum_{q=1}^n |x_q| |z_q| \leq \|x\|_p \, \|z\|_q$

ie $\sum_{q=1}^n |x_q| \, |x_q+y_q|^{p-1} \leq \|x\|_p \left(\sum_{q=1}^n |x_q+y_q|^{q(p-1)}\right)^{1/q} = \|x\|_p \left(\sum_{q=1}^n |x_q+y_q|^p\right)^{1/p}$ car $q(p-1) = p$

5b) De même $\sum_{q=1}^n |y_q| \, |x_q+y_q|^{p-1} \leq \|y\|_p \left(\sum_{q=1}^n |x_q+y_q|^p\right)^{1/q}$

5c) En sommant on a $\sum_{q=1}^n (|x_q| + |y_q|) |x_q+y_q|^{p-1} \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{q=1}^n |x_q+y_q|^p\right)^{1/q}$ or $|x_q+y_q| \leq |x_q| + |y_q|$

Donc $\sum_{q=1}^n |x_q+y_q|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \, \|x+y\|_p^{p-1}$ Si $\|x+y\|_p = 0$ on a le résultat.

Si non en divisant par $\|x+y\|_p^{p-1}$, on a $\boxed{\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p}$

5d) On avait déjà établi que $\|\ \|_p$ est une application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^+$ vérifiant les axiomes d'homogénéité et de séparation, l'inégalité de Minkowski correspondant à l'inégalité triangulaire : $\|\ \|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

6) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $x = (x_1, \dots, x_n)$. On a $\forall q \in [\![1, n]\!]$, $|x_q|^p \leq \|x\|_p^p$ et il existe un q_0 / $|x_{q_0}| = \|x\|_\infty$

Ainsi : $\|x\|_\infty^p \leq \sum_{q=1}^{n} |x_q|^p \leq n \|x\|_\infty^p$ ie $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$

or $n^{1/p} = \exp\left(\frac{1}{p} \ln(n)\right) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1$ Donc $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

Partie II Norme sur un sous espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\ell^p = \left\{ U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \sum |u_n|^p \text{ converge} \right\}$ $N_p(U) = \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_q|^p \right)^{1/p}$

1). ℓ^p est clairement une partie non vide de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (contient la suite nulle)

· Soit $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $V = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans ℓ^p et $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'après l'inégalité de Minkowski dans $\mathbb{R}^n$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{q=0}^{n} |u_q + \lambda v_q|^p \leq \left(\left(\sum_{q=0}^{n} |u_q|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{q=0}^{n} |\lambda v_q|^p \right)^{1/p} \right)^p$

Or $\left(\sum_{q=0}^{n} |u_q|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(N_p(U) \right)^p$ et $\left(\sum_{q=0}^{n} |v_q|^p \right) \leq \left(N_p(V) \right)^p$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{q=0}^{n} |u_q + \lambda v_q|^p \leq \left(N_p(U) + |\lambda| N_p(V) \right)^p$ Donc par majoration des sommes partielles d'une série à termes positifs, $\sum |u_n + \lambda v_n|^p$ converge

Ainsi : $U + \lambda V \in \ell^p$: ℓ^p est stable par combinaison linéaire.

Par caractérisation des sous espaces vectoriels, ℓ^p est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

2). N_p est clairement une application de ℓ^p vers $\mathbb{R}^+$

· La séparation se montre aisément en constatant qu'une série positive convergente de somme nulle est la série nulle

· L'homogénéité s'obtient par linéarité du passage à la somme pour les séries convergentes

· L'inégalité triangulaire provient de l'inégalité obtenue en Q7 avec $\lambda = 1$: $\sum_{q=0}^{n} |u_q + v_q|^p \leq \left(N_p(U) + N_p(V) \right)^p$

Donc $N_p(U+V) \leq N_p(U) + N_p(V)$

Ainsi N_p est une norme sur ℓ^p

3) Soit $U \in \ell^p$ et $V \in \ell^q$. En appliquant l'inégalité de Hölder dans $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $x = (u_0, \dots, u_n)$ et $y = (v_0, \dots, v_n)$

On a $\sum_{q=0}^{n} |u_q v_q| \leq \|x\|_p \|y\|_q = \left(\sum_{q=0}^{n} |u_q|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{q=0}^{n} |v_q|^q \right)^{1/q} \leq N_p(U) N_q(V)$

Ainsi par critère de convergence des séries positives par majoration des sommes partielles,

On a $\sum |u_q v_q|$ converge et $\sum_{q=0}^{+\infty} |u_q v_q| \leq N_p(U) N_q(V)$

Partie III Normes sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

$a < b$ $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ $N_p(f) = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$

10) N_p est clairement bien définie de E vers $\mathbb{R}^+$ et vérifie l'homogénéité par linéarité de l'intégration

si $f \in E$ / $N_p(f) = 0$. alors $\int_a^b |f(t)|^p dt = 0$ or $|f|^p$ est une fct continue positive sur $[a,b]$

Donc $\forall t \in [a,b]$, $|f(t)|^p = 0$ ie $f = 0_E$: N_p vérifie l'axiome de séparation

11) Soit $(f,g) \in (E)^2$ / $N_p(f) > 0$ et $N_p(g) > 0$. Soit $F : t \to \frac{|f(t)|}{N_p(f)}$ et $G : t \to \frac{|g(t)|}{N_q(g)}$

F et G sont des fonctions continues positives sur $[a,b]$

11a) Pour $t \in [a,b]$, on applique l'inégalité de Young à $\alpha = F(t)$ et $\beta = G(t)$. On a

$$|F(t)G(t)| \leq \frac{1}{p}|F(t)|^p + \frac{1}{q}|G(t)|^q \quad \text{ie} \quad F(t)G(t) \leq \frac{1}{p}(F(t))^p + \frac{1}{q}(G(t))^q$$

11b) En intégrant l'inégalité on a $\int_a^b F(t)G(t)\,dt \leq \frac{1}{p}\int_a^b F(t)^p\,dt + \frac{1}{q}\int_a^b (G(t))^q\,dt$

or $\int_a^b (F(t))^p\,dt = \int_a^b \frac{|f(t)|^p}{(N_p(f))^p}\,dt = 1 = \int_a^b (G(t))^q\,dt$ donc $\int_a^b F(t)G(t)\,dt \leq 1$

Ainsi : $\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt = N_p(f)\,N_q(g)\int_a^b F(t)G(t)\,dt \leq N_p(f)\,N_q(g)$

12) Soit $(f,g) \in E^2$. → si f ou g nulle on a $\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leq N_p(f)\,N_q(g)$

→ sinon d'après 11 on a $\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leq N_p(f)\,N_q(g)$

Par ailleurs $(N_p(f+g))^p = \int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt \leq \int_a^b \big(|f(t)|+|g(t)|\big)\,|f(t)+g(t)|^{p-1}\,dt$

Donc $(N_p(f+g))^p \leq \int_a^b |f(t)|\,|f(t)+g(t)|^{p-1}\,dt + \int_a^b |g(t)|\,|f(t)+g(t)|^{p-1}\,dt$

$\leq N_p(f)\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q} + N_q(g)\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q}$

ie $(N_p(f+g))^p \leq (N_p(f)+N_p(g))\,(N_p(f+g))^{p-1}$ (rappel : $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$)

Ainsi → si $N_p(f+g) = 0$ on a bien $N_p(f+g) \leq N_p(f)+N_p(g)$

→ sinon $(N_p(f+g))^{p-1} > 0$ donc en divisant par $(N_p(f+g))^{p-1}$, on a $N_p(f+g) \leq N_p(f)+N_p(g)$

Donc N_p vérifie l'inégalité triangulaire

Or en Q10 on avait déjà vérifié les autres axiomes de norme donc

N_p est une norme sur E.

13) Soit $f \in E$. • si f est nulle on a $N_p(f) = 0 \xrightarrow[p\to+\infty]{} N_\infty(f)$

• sinon $|f|$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc est majorée et atteint sa maximum

Soit $x_0 \in [a,b]$ / $|f(x_0)| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = N_\infty(f)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{|f(x_0)|}{2}\right)$ on a $\alpha > 0$

Par continuité de $|f|$ en x_0 on a l'existence de $(c,d) \in [a,b]^2$ / $c<d$, $x_0 \in [c,d]$ et

$\forall t \in [c,d]$, $|f(x_0)| - \alpha \leq |f(t)| \leq |f(x_0)|$

On pose alors $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto \begin{cases} |f(x_0)|-\alpha & \text{si } t \in [c,d] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a $\forall t \in [a,b]$, $0 \leq g(t) \leq |f(t)| \leq N_\infty(f)$

Donc $\forall t \in [a,b]$, $0 \leq g^p(t) \leq |f(t)|^p \leq (N_\infty(f))^p$ Donc en intégrant entre a et b on a $(d-c)\,(|f(x_0)|-\alpha)^p \leq (N_p(f))^p \leq (N_\infty(f))^p\,(b-a)$

Donc $(d-c)^{1/p}\,(|f(x_0)|-\alpha) \leq N_p(f) \leq N_\infty(f)\,(b-a)^{1/p}$

Or $(b-a)^{1/p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$ donc $\exists p_1 \in]1,+\infty[$ / $\forall p \geqslant p_1$, $N_\infty(f)\,(b-a)^{1/p} \leq N_\infty(f)+\varepsilon$

$\star$ $(d-c)^{1/p}\,(N_\infty(f)-\alpha) \xrightarrow[p\to+\infty]{} N_\infty(f)-\alpha$ Donc $\exists p_2 \in]1,+\infty[$ / $\forall p \geqslant p_2$ $(d-c)^{1/p}\,(N_\infty(f)-\alpha) \geqslant N_\infty(f)-\varepsilon$

Pour $p \geqslant \max(p_1,p_2)$ on a $N_\infty(f)-\varepsilon \leq N_p(f) \leq N_\infty(f)+\varepsilon$: $N_p(f) \xrightarrow[p\to+\infty]{} N_\infty(f)$