Devoir surveillé n° 05 (4 heures)

Sujet Niveau CCINP - E3A

Ce devoir est constitué d'un probleme et d'un exercice.
Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. On veillera également à l'indentation des scripts Python. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.
La calculatrice est interdite.

EXERCICE

Normes sur $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$

On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt \quad , \quad N(f) = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

1. Démontrer que N définit une norme sur E.
De même $\|.\|$ et $\|.\|_1$ sont des normes sur E mais il est inutile de le démontrer ici.

2. Démontrer que les deux normes N et $\|.\|$ sont équivalentes sur E.

3. La norme $\|.\|$ est-elle équivalente à la norme $\|.\|_1$ sur E. On justifiera bien entendu la réponse.

PROBLEME

Comparaison de deux normes sur $\mathbb{R}_n[X]$

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On identifiera un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à la fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$.
Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = X \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

Dans tout le problème, et auf avis contraire, n désigne un entier naturel.

Partie I : Propriétés de T_n

1. Déterminer les polynomes T_2, T_3 et T_4.

2. Quel est le degré de T_n et son coefficient dominant ?

3. Étudier la parité de T_n.

4. Calculer $T_n(1), T(-1)$ et $T_n(0)$.

5. Montrer que T_n est le seul polynome qui vérifie : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

6. Dans cette question uniquement on suppose que l'entier n est non nul. Montrer que T_n possède n racines distinctes dans $[-1,1]$.
En déduire la factorisation de T_n en produit de facteurs irréductibles

7. Déterminer les racines de T_n'.

Partie II : Deux normes sur $\mathbb{R}[X]$

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, avec $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $p \geqslant \deg(P)$, on pose

$$L(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| \quad \text{et} \quad N(P) = \max_{0\leqslant k\leqslant p} |a_k|$$

.

On considère enfin l'application φ de $(\mathbb{R}[X])^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \quad \varphi(P,Q) = \int_0^\pi P(\cos\theta)\, Q(\cos\theta)\, d\theta$$

8. Montrer que L et N sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$

9. On pose $\gamma_n = n+1$. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad L(P) \leqslant \gamma_n\, N(P)$

10. Donner un exemple de polynome $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que : $L(Q) = \gamma_n\, N(Q)$. Que peut-on en déduire ?

11. Calculer $L(T_n)$.

12. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

13. Soient n et m deux entiers naturels distincts. Calculer $\varphi(T_n, T_n)$ et $\varphi(T_n, T_m)$.

14. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Montrer qu'il existe un unique $(n+1)-$uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k$.

Vérifier alors que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $|\alpha_k| \leqslant 2L(P)$

15. Dans cette question uniquement, l'entier n est strictement positif.
Montrer que : $N(T_{n+1}) \leqslant 2N(T_n) + N(T_{n-1})$.

16. On pose $q = 1+\sqrt{2}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(T_n) \leqslant q^n$.

17. En déduire que l'on a : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad N(P) \leqslant q^{n+1}\sqrt{2}\, L(P)$

Partie III : Etude d'un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$

On considère l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = \left(X^2-1\right)P'' + XP'$$

18. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

19. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $\Phi\left(X^k\right)$.

20. En déduire $\ker(\Phi)$.

21. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique $\left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

22. Calculer la trace de Φ.

23. Quelles sont les valeurs propres de Φ ? L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

24. Déterminer les sous-espaces propres de Φ

Normes sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$

$E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on note $\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt$,

$N(f) = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$

1) N est bien définie car si $f \in E$, f' est continue sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 |f'(t)|\,dt$ existe.
De plus N est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f \in E$, $N(\lambda f) = 2|\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)|\,dt = |\lambda| N(f)$: N vérifie l'axiome d'homogénéité

• Si $f \in E$ / $N(f) = 0$. Alors comme la somme de réels positifs est nulle ssi ces réels sont nuls,
on a $|f(0)| = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)|\,dt = 0$.
Or $|f'|$ est continue positive sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 |f'(t)|\,dt = 0 \Rightarrow \forall t \in [0,1],\ f'(t) = 0$
Ainsi f constante sur $[0,1]$. Donc comme $f(0) = 0$, on a $f = 0_E$

• Soit $(f,g) \in E^2$. $N(f+g) = 2|f(0)+g(0)| + \int_0^1 |f'(t)+g'(t)|\,dt \leq \left(2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt\right)$
$+ \left(2|g(0)| + \int_0^1 |g'(t)|\,dt\right)$

Donc $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.

Ainsi : N est une norme sur E.

2) On a $\forall f \in E,\ \frac{1}{2}\|f\| \leq N(f) \leq 2\|f\|$ Donc N et $\|\ \|$ sont équivalentes sur E

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n : t \mapsto t^n$ On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n \in E \setminus \{0\}$

On a $\|f_n\| = |f_n(0)| + 2\int_0^1 |nt^{n-1}|\,dt = 2$

et $\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$ $\frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_1} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$

Donc $\|\ \|$ et $\|\ \|_1$ ne sont pas équivalentes

Banque PT 2007 Epreuve A. $T_0=1,\ T_1=X,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ T_{n+1}=2XT_n-T_{n-1}$ (*)

Partie I Propriétés de T_n

1) On vérifie aisément $T_2=2X^2-1$, $T_3=4X^3-3X$ et $T_4=8X^4-8X^2+1$

2) Par récurrence immédiate (avec double), on montre que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg T_n=n$ et $\dom(T_n)=\mathbb{R}$ sauf pour $n=0$ où $\dom(T_0)=1$

3) On pose $\mathcal{R}_p$: "T_{2p} est paire et T_{2p+1} est impaire"

* $\mathcal{R}_0$ est vraie car T_0 est paire et T_1 est impaire.

* Soit $p\in\mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{R}_p$. On a $T_{2p+2}=2XT_{2p+1}-T_{2p}$ paire comme somme de polynômes pairs

$T_{2p+3}=2XT_{2p+2}-T_{2p+1}$ impaire : $\mathcal{R}_{p+1}$ vraie.

* On a montré $\mathcal{R}_0$ vraie et, $\forall p\in\mathbb{N}$, $\mathcal{R}_p\Rightarrow\mathcal{R}_{p+1}$. Donc par th de récurrence, $\forall p\in\mathbb{N}$, $\mathcal{R}_p$.

En particulier $\forall n\in\mathbb{N}$, T_n est de la parité de n

4) En évaluant en 1, -1 et 0 la relation (*) on a

$\forall n\in\mathbb{N}$, $T_{n+2}(1)=2T_{n+1}(1)-T_n(1)$, $T_{n+2}(-1)=-2T_{n+1}(-1)-T_n(-1)$

et $T_{n+2}(0)=-T_n(0)$ ⊙ qui sont des relations de récurrence linéaires doubles

On montre alors que * $\forall n\in\mathbb{N}$, $T_n(1)=1$

* Par parité de T_n, $\forall n\in\mathbb{N}$, $T_n(-1)=(-1)^n$

* En utilisant ⊙ et $T_0(0)=1$, $T_1(0)=0$ on montre $\forall p\in\mathbb{N}$, $\begin{cases}T_{2p}(0)=(-1)^p\\ T_{2p+1}(0)=0\end{cases}$

5) Soit $\mathcal{P}_n$: "$\forall\theta\in\mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(\cos\theta)=\cos((n+1)\theta)$"

* $\mathcal{P}_0$ est vraie car $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $T_0(\cos\theta)=1=\cos(0\theta)$ et $T_1(\cos\theta)=\cos\theta=\cos(1\theta)$

* Si $\mathcal{P}_n$ vraie. $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $T_{n+2}(\cos\theta)=2\cos\theta\,T_{n+1}(\cos\theta)-T_n(\cos\theta)=2\cos\theta\cos((n+1)\theta)-\cos(n\theta)$

Donc $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $T_{n+2}(\cos\theta)=\cos((n+1)\theta)$: $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

* On a $\mathcal{P}_0$ vraie et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n\Rightarrow\mathcal{P}_{n+1}$ Donc par th de récurrence $\forall n$, $\mathcal{P}_n$ vraie

En particulier $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$

Soit $n\in\mathbb{N}$. S'il existe un polynôme P tel que $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $P(\cos\theta)=\cos(n\theta)$

On a par surjectivité de cos, $\forall x\in[-1,1]$ $P(x)=T_n(x)$

Donc les polynômes T_n et P coïncident en une infinité de points : ils sont égaux

Ainsi : T_n est le seul polynôme vérifiant $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$

6) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose pour $j\in[\![0,n-1]\!]$ $x_j=\cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right)$.

On vérifie que les x_j sont tous racines de T_n, car $T_n(x_j)=\cos\left((2j+1)\frac{\pi}{2}\right)=0$, et sont distincts 2 à 2 (par injectivité de cos sur $[0,\pi]$)

On a ainsi trouvé n racines distinctes (et dans $[-1,1]$) de T_n qui est de degré n : on a toutes les racines.

On en déduit $T_n=2^{n-1}\prod_{j=0}^{n-1}\left(X-\cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right)\right)$

7) En dérivant la relation $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, on a

$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -\sin\theta\, T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta)$ Donc $\forall \theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z},\ T_n'(\cos\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$

On en déduit que si $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, on a $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ T_n'(x_k) = 0$

Or les x_k sont distincts 2 à 2 (par injectivité de cos sur $[0,\pi]$) et $\deg T_n' = n-1$

Donc on a trouvé toutes les racines de T_n' : ce sont les $\cos\frac{k\pi}{n}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$

Partie II. Deux normes sur $\mathbb{R}[X]$ Pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, $L(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$ et $N(P) = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$

8) On montre aisément que L et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

Le seul point non usuel est le passage $L(P) = 0 \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. En effet si $L(P) = 0$, on a $\forall x \in [-1,1],\ P(x) = 0$. On conclut alors en disant que, puisque P est un polynôme ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

9) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a alors $\forall x \in [-1,1],\ |P(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| |x|^k \leq \sum_{k=0}^{n} N(P)$

Donc $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ L(P) \leq (n+1) N(P)$

10) Si $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$. On a $L(P) = n+1$ et $N(P) = 1$. On a donc dans ce cas $L(P) = (n+1)N(P)$

Ainsi on ne peut pas trouver de constante $\alpha > 0$ inférieure à $\alpha_n = (n+1)$ vérifiant :

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ L(P) \leq \alpha N(P)$

11) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\forall x \in [-1,1],\ \exists \theta \in \mathbb{R} / x = \cos\theta$.

Donc $|T_n(x)| = |T_n(\cos\theta)| = |\cos(n\theta)| \leq 1$ Donc $L(T_n) \leq 1$

Or $|T_n(1)| = 1$ Donc $L(T_n) = 1$

12) La bilinéarité, la symétrie et la positivité sont claires.

Reste à établir $\varphi(P,P) = 0 \Rightarrow P = 0$

Soit $P \in \mathbb{R}[X] / \varphi(P,P) = 0$. On a $\int_0^\pi P^2(\cos\theta)\, d\theta = 0$

Or $\theta \mapsto P^2(\cos\theta)$ est continue positive donc $\int_0^\pi P^2(\cos\theta)\,d\theta = 0 \Rightarrow \forall \theta \in [0,\pi],\ P(\cos\theta) = 0$

Ainsi $\forall \theta \in [0,\pi],\ P(\cos\theta) = 0$. Donc $\forall x \in [-1,1],\ P(x) = 0$

Donc P est un polynôme ayant une infinité de racines : $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Ainsi : φ est un produit scalaire

13) $\varphi(T_0, T_0) = \int_0^\pi d\theta = \pi$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ $\varphi(T_n, T_n) = \int_0^\pi (T_n(\cos\theta))^2 d\theta = \int_0^\pi \cos^2 n\theta\, d\theta$

Donc $\varphi(T_n, T_n) = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2n\theta)}{2}\, d\theta = \frac{\pi}{2}$

Si $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \neq m$. On a $\varphi(T_n, T_m) = \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta))\, d\theta$

Donc $\varphi(T_n, T_m) = 0$

14) $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est ainsi une famille orthogonale d'éléments non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ donc elle est libre.

C'est une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Ainsi : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists!\, (d_0, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / P = \sum_{k=0}^{n} d_k T_k$.

On a alors $\varphi(P, T_0) = d_0 \pi$ et $\varphi(P, T_k) = d_k \frac{\pi}{2}$ pour $k \geq 1$

Or $\forall k \in [\![0,n]\!],\ |\varphi(P, T_k)| \leq \int_0^\pi |P(\cos\theta)|\, |T_k(\cos\theta)|\, d\theta \leq \int_0^\pi L(P) \times 1\, d\theta = \pi L(P)$

Ainsi : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ |d_k| \leq 2L(P)$

15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $N(T_{n+1}) \leq N(2XT_n) + N(T_{n-1}) = 2N(T_n) + N(T_{n-1})$ (les coeff de XT_n sont les mêmes que ceux de T_n)

$q = 1+\sqrt{2}$

16) Soit $\mathcal{P}_n$: " $N(T_n) \leq q^n$ et $N(T_{n+1}) \leq q^{n+1}$ "

* $\mathcal{P}_0$ vraie car $N(T_0) = 1 \leq q^0$ et $N(T_1) = 1 \leq q^1$

* S: $\mathcal{P}_n$ vraie. On a $N(T_{n+2}) \leq 2N(T_{n+1}) + N(T_n) \leq 2q^{n+1} + q^n = (2q+1)q^n$ car $\mathcal{P}_n$ vraie

Or $q^2 - (2q+1) = 3 + 2\sqrt{2} - (2 + 2\sqrt{2} + 1) = 0$ Donc $N(T_{n+2}) \leq q^{n+2}$: $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie

On a montré $\mathcal{P}_0$ vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ vraie entraîne $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie. Donc par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ vraie

(en particulier $\forall n \in \mathbb{N}$, $N(T_n) \leq q^n$)

17) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k$.

Par inégalité triangulaire et homogénéité, on a $N(P) \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| N(T_k) \leq \sum_{k=0}^{n} 2L(P) q^k = 2L(P) \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

Or $q - 1 = \sqrt{2}$ Donc $N(P) \leq \sqrt{2} L(P) (q^{n+1} - 1) \leq \sqrt{2} L(P) q^{n+1}$

Partie III

$\Phi(P) = (X^2-1)P'' + XP'$

18) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg((X^2-1)P'') \leq \deg P$ et $\deg(XP') \leq \deg P$. Donc si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

De plus Φ est linéaire par linéarité de la dérivation : Ainsi Φ endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

19) $\Phi(1) = 0$ $\Phi(X) = X$ et pour $k \in [\![2, n]\!]$, $\Phi(X^k) = k^2 X^k - (k-1)k X^{k-2}$

20) $\operatorname{rg}(\Phi) \geq \operatorname{rg}(\Phi(1), \Phi(X), \dots, \Phi(X^n)) = n$ donc $\dim \ker \Phi \leq 1$. Or $\Phi(1) = 0$ donc $\dim \ker \Phi = 1$. $\ker \Phi = \operatorname{vect}(1)$

21) $\operatorname{mat}_{(1, X, \dots, X^n)}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\times 2 & & \\ 0 & 1 & & \ddots & \\ 0 & 0 & 2^2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & -n\times(n-1) \\ 0 & 0 & & & n^2 \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ avec $\begin{cases} a_{i,i} = i^2 \\ a_{(i-2),i} = -i(i-1) \\ a_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

22) La trace de Φ est la somme des coefficients diagonaux de $\operatorname{mat}_{(1,X,\dots,X^n)}$.

Donc $\operatorname{tr}(\Phi) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

23) Comme $\operatorname{mat}_{(1,X,\dots,X^n)}(\Phi)$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $(k^2)_{k \in [\![0,n]\!]}$

On a $\chi_\Phi = \prod_{k=0}^{n} (X - k^2)$: les valeurs propres sont les k^2 pour $k \in [\![0,n]\!]$

χ_Φ est scindé à racines simples donc Φ est diagonalisable.

24) Comme χ_Φ est scindé à racines simples, les sous espaces propres sont de dimension 1

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On a $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$, $-\sin\theta\, T_k'(\cos\theta) = -k\sin(k\theta)$

et $-\cos\theta\, T_k'(\cos\theta) + \sin^2\theta\, T_k''(\cos\theta) = -k^2\cos k\theta = -k^2 T_k(\cos\theta)$

Ainsi : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $(\cos^2\theta - 1) T_k''(\cos\theta) + \cos\theta\, T_k'(\cos\theta) = k^2 T_k(\cos\theta)$

Donc comme $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, on a $\forall x \in [-1, 1]$, $(x^2-1) T_k''(x) + x T_k'(x) = k^2 T_k(x)$

Ainsi les polynômes $(X^2-1)T_k'' + XT_k'$ et $k^2 T_k$ coïncident en une infinité de points

donc ils sont égaux. Donc $\Phi(T_k) = k^2 T_k$: T_k est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre k^2

Aussi : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\ker(\Phi - k^2 \mathrm{Id}) = \operatorname{vect}(T_k)$