Correction du DS1 du 2 octobre 2024

Partie 1

Q1 : $\vec{V}_{I_1\in 1/0} = \vec{V}_{O\in 1/0} + \vec{I_1O} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

$$= V_x\vec{x}_1 + V_y\vec{y}_1 + (\vec{I_1B_1} + \vec{B_1A_1} + \vec{A_1O}) \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1$$

$$= V_x\vec{x}_1 + V_y\vec{y}_1 + (r\vec{z}_1 + R\vec{z}_1 - a\vec{x}_1 - b\vec{y}_1) \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1$$

$$= V_x\vec{x}_1 + V_y\vec{y}_1 + a\dot{\theta}\vec{y}_1 - b\dot{\theta}\vec{x}_1$$

$$\boxed{\vec{V}_{I_1\in 1/0} = (V_x - b\dot{\theta})\vec{x}_1 + (V_y + a\dot{\theta})\vec{y}_1}$$

Q2 : $\vec{V}_{A_1\in 10/1} = \vec{0}$ puisque A_1 est sur l'axe de rotation entre 10 et 1

Q3 : $\vec{V}_{B_1\in 11/10} = \vec{0}$ puisque B_1 est sur l'axe de rotation entre 11 et 10

Q4 : $\vec{V}_{I_1\in 11/0} = \vec{V}_{I_1\in 11/1} + \vec{V}_{I_1\in 1/0}$ (composition de vitesses)

on connaît déjà $\vec{V}_{I_1\in 1/0}$ (Q1)

déterminons $\vec{V}_{I_1\in 11/1} = \vec{V}_{I_1\in 11/10} + \vec{V}_{I_1\in 10/1}$

$$= \vec{V}_{B_1\in 11/10} + \vec{I_1B_1} \wedge \vec{\Omega}_{11/10}$$

$$+ \vec{V}_{A_1\in 10/1} + \vec{I_1A_1} \wedge \vec{\Omega}_{10/1}$$

d'où d'après Q2 et Q3

$$\vec{V}_{I_1\in 11/1} = r\vec{z}_1 \wedge \dot{\beta}_{11}\vec{x}_{11} + (r+R)\vec{z}_1 \wedge \omega_{10}\vec{x}_1$$

or $\vec{x}_{11} = \cos(\alpha_{11})\vec{x}_1 + \sin(\alpha_{11})\vec{y}_1$

d'où $\vec{V}_{I_1\in 11/1} = r\dot{\beta}_{11}\left(\cos\alpha_{11}\vec{y}_1 - \sin(\alpha_{11})\vec{x}_1\right) + (r+R)\omega_{10}\vec{y}_1$

Finalement :

$$\vec{V}_{I_1\in 11/0} = \left(-r\dot{\beta}_{11}\sin\alpha_{11} + V_x - b\dot{\theta}\right)\vec{x}_1 + \left(V_y + a\dot{\theta} + r\dot{\beta}_{11}\cos\alpha_{11} + (r+R)\omega_{10}\right)\vec{y}_1$$

or $\alpha_{11} = -45°$ d'où $\sin\alpha_{11} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\alpha_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et $\dot{\theta} = \omega$

$$\vec{V}_{I_1\in 11/0} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\dot{\beta}_{11} + V_x - b\omega\right)\vec{x}_1 + \left(V_y + a\omega + \frac{\sqrt{2}}{2}r\dot{\beta}_{11} + (r+R)\omega_{10}\right)\vec{y}_1$$

le roulement sans glissement donne $\vec{V}_{I_1\in 11/0} = \vec{0}$

d'où les deux équations scalaires :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}r\dot{\beta}_{11} + V_x - b\omega = 0 & (1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}r\dot{\beta}_{11} + V_y + a\omega + (r+R)\omega_{10} = 0 & (2) \end{cases}}$$

Q5 W = MV

(1) donne $\frac{\sqrt{2}}{2}r\dot{\beta}_{11} = b\omega - V_x$ dans (2) cela donne :

$$b\omega - V_x + V_y + a\omega + (r+R)\omega_{10} = 0$$

d'où $\omega_{10} = \frac{1}{r+R}\left(V_x - V_y - (a+b)\omega\right)$

pour les autres vitesses de rotation on a de la même façon

$$\omega_{20} = \frac{1}{r+R}\left((a+b)\omega - V_x - V_y\right)$$

$$\omega_{30} = \frac{1}{r+R}\left((a+b)\omega + V_x - V_y\right)$$

$$\omega_{40} = \frac{1}{r+R}\left(-(a+b)\omega - V_x - V_y\right)$$

d'où $$\boxed{M = \frac{1}{r+R}\begin{pmatrix} -(a+b) & +1 & -1 \\ (a+b) & -1 & -1 \\ (a+b) & +1 & -1 \\ -(a+b) & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Q6:

$$\underline{W_1} = M.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{(r+R)}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{W_2} = M.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{(r+R)}\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

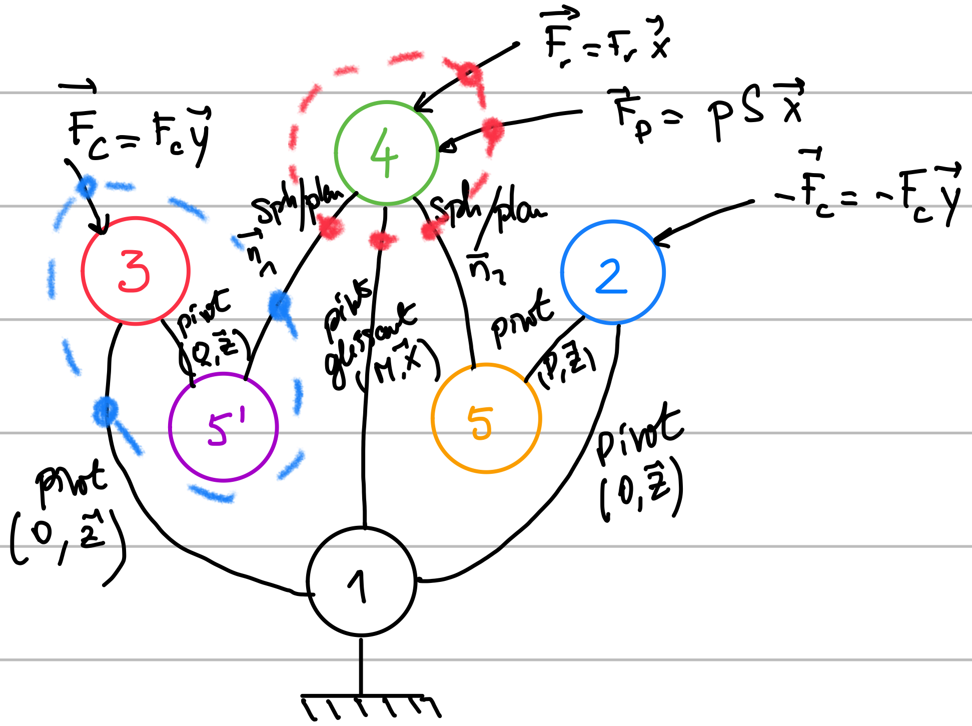
$$\underline{W_3} = M.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{(r+R)}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Q7 Connaissant W on peut déterminer les trois composantes de V de façon unique puisque la 4ème ligne de la matrice est une combinaison linéaire des 3 premières

$l_4 = l_1 + l_2 - l_3 \Rightarrow$ 3 équations indépendantes et 3 inconnues $\Rightarrow$ une solution unique.

Partie 2

Q8



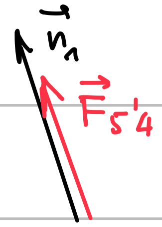
Q9 On isole 4 (frontière rouge - - -) sur le graphe d'analys
on compte 5 torseurs extérieurs :

$$\left\{\mathcal{T}^{PivotGlissant}_{1\to 4}\right\}_M = \left\{\begin{matrix} Y_{14}\vec{y} + \cancel{Z_{14}}\vec{z} \\ \cancel{M_{14}}\vec{y} + N_{14}\vec{z} \end{matrix}\right\}_M$$

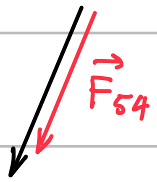
$$\left\{\mathcal{T}^{Sph/plan}_{5\to 4}\right\}_L = \left\{\begin{matrix} F_{54}\vec{n}_2 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_L \qquad \left\{\mathcal{T}^{Sph/plan}_{5'\to 4}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} F_{5'4}\vec{n}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A$$

$$\left\{\mathcal{T}_{ressort\to 4}\right\} = \left\{\begin{matrix} F_r\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_M \qquad \left\{\mathcal{T}_{huile\to 4}\right\}_M = \left\{\begin{matrix} -pS\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_M$$

Q10 5 et 5' sont soumis à 2 torseurs glisseurs, les efforts transmis par 5 et 5' sont dirigés selon $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$



$$\Rightarrow \quad X_{5'4} = -\tan 15° \; Y_{5'4} = -0{,}27\, Y_{5'4}$$



$$\Longrightarrow \quad X_{54} = \tan 15° \; Y_{54} = 0{,}27\, Y_{54}$$

Q11 Appliquons le Théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{x}$ ce qui donne :

$$-X_{54} - X_{5'4} + F_r - pS = 0$$

on a supposé que $\|\vec{F}_{54}\| = \|\vec{F}_{5'4}\|$ ce qui donne

$$2\,X_{54} = F_r - pS \qquad X_{54} = \frac{F_r - pS}{2}$$

alors $\boxed{Y_{54} = 0{,}27\,\dfrac{F_r - pS}{2}}$ $\quad \boxed{Y_{5'4} = -0{,}27\,\dfrac{F_r - pS}{2}}$

Q12 : On isole l'ensemble $\{3, 5'\}$ (frontière bleue - - -)

Sur le graphe d'analyse on compte 3 torseurs extérieurs.

$$\left\{\mathcal{T}^{\vec{F}_c}_{\text{câble}\to 3}\right\}_C = \left\{\begin{matrix} F_c\,\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_C \qquad \left\{\mathcal{T}_{5'\to 3}\right\}_Q = \left\{\begin{matrix} -X_{5'4}\,\vec{x} - Y_{5'4}\,\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_Q$$

$$\left\{\mathcal{T}^{\text{Pivot}}_{1\to 3}\right\}_O = \left\{\begin{matrix} X_{13}\,\vec{x} + Y_{13}\,\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_O \quad \text{(hypothèse plane)}$$

Q13 : On applique le théorème du moment statique en O :

$$-F_c \times 26 + X_{5'4} \times 4{,}5 - Y_{5'4} \times 47 = 0$$

$$\text{d'où } F_c = \frac{-4{,}5 \cdot X_{5'4} + 47\, Y_{5'4}}{26} = \frac{-4{,}5 \cdot X_{5'4} + 0{,}27 \times 47\, X_{5'4}}{26}$$

$$F_c = \frac{-4{,}5 + 0{,}27 \times 47}{26} \times X_{s'4} = 0{,}315 \times \frac{F_r - pS}{2}$$

A.N. $F_c = 0{,}15\left(250 - 25\times10^6 \times \pi \times 0{,}02^2\right)$

$$\boxed{F_c = -4875\,N}$$

Q14 $\frac{F_c}{S_c} > 500 \times 10^6 \Rightarrow S_c < \frac{F_c}{500\times10^6} = \frac{4875}{500\times10^6} = 9{,}7\times10^{-6}$

Si on suppose que le câble à une section circulaire

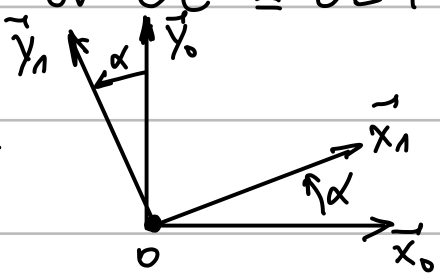
cela donne un câble de diamètre maxi $= 3{,}45$ mm

Partie 3 :

Q15 : D'après la figure 4 $y_c = \vec{OC} \cdot \vec{y_0}$

or $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = (r+b)\,\vec{x_1} + h\,\vec{y_1}$

Avec



alors $\vec{OC} = (r+b)\left(\cos\alpha\,\vec{x_0} + \sin\alpha\,\vec{y_0}\right) + h\left(-\sin\alpha\,\vec{x_0} + \cos\alpha\,\vec{y_0}\right)$

d'où $\vec{OC}\cdot\vec{y_0} = \boxed{y_c = (r+b)\sin\alpha + h\cos\alpha}$

Q16 : $y_{c\,max}$ pour $\frac{dy_c}{d\alpha} = 0$ $\quad \frac{dy_c}{d\alpha} = (r+b)\cos\alpha - h\sin\alpha = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{r+b}{h} = \tan\alpha}$$

A.N. $\alpha = \text{Arctan}\,\frac{720+480}{670} \Rightarrow \alpha = 60{,}8°$

alors $y_{c\,max} = (720+480)\sin 60{,}8 + 480\cos(60{,}8)$

$= 1281{,}7$ mm > 1260 mm l'exigence 1.3 n'est pas vérifiée.

Q 17 La trajectoire de C_1 est un arc de cercle

Q 18 La trajectoire de C_2 est un segment rectiligne

Q 19 D'après la figure 7 on a $y_{c\,max} = 1250{,}5$ mm

$y_{c\,max} < 1260$ mm Id 1.3 est vérifiée

Q 20 : La sortie du réducteur doit décrire un angle de π (demi-tour) entre $t=0$ et $t=t_3$

$$\omega_r = \frac{d\theta_r}{dt} \quad \text{donc} \quad \theta_r = \int_{t=0}^{t=t_3} \omega_r(t)\,dt$$

on a donc $\pi = \Sigma$ surface sous la courbe de $\omega_r(t)$

$$\pi = \frac{t_1 \times \omega_{max}}{2} + (t_2 - t_1)\,\omega_{max} + \frac{\omega_{max}}{2}(t_3 - t_2)$$

ce qui donne $\omega_{max} = \dfrac{2\pi}{t_1 + 2(t_2 - t_1) + (t_3 - t_2)}$

$$\boxed{\omega_{max} = \frac{2\pi}{t_2 - t_1 + t_3}}$$

A.N. $\omega_{max} = \dfrac{2\pi}{2{,}5 - 0{,}5 + 3} = \dfrac{2\pi}{5}$ rad/s

$\omega_{max} = 1{,}26$ rad/s

Q 21 : $\omega_{max\,moteur} = \dfrac{\omega_{r\,max}}{k} = 107{,}7 \times 1{,}26$

$\omega_{max\,moteur} = 135{,}3\ rad/s = 1292\ tr/min$

Q22 : $\left\{\mathcal{T}^{1}_{S_0 \to S_1}\right\}_{A_1} = \left\{\begin{matrix} F^{1}_{01}\,\vec{x}_{11} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{A_1}$ (liaison sphère/plan dans le plan $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$)

$\left\{\mathcal{T}^{2}_{S_0 \to S_1}\right\}_{A_2} = \left\{\begin{matrix} F^{2}_{01}\,\vec{x}_{12} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{A_2}$ (liaison sphère/plan dans le plan $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$)

ce sont des glisseurs puisque les moments sont nuls en I

Q23 : La somme des 2 torseur est un torseur de moment nul si on la calcule en I ($M_{I,\vec{F}^1_{01}} = M_{I,\vec{F}^2_{01}} = \vec{0}$)

Q24 : Le poids de la bielle est négligé et la bielle est soumise à deux glisseurs transmis en D (liaison pivot) et en B (liaison sphérique), l'effort $\vec{F}_B$ est donc porté par le vecteur $\vec{x}_2$.

Q25 On isole le système 1 :

le B.A.M.E donne : $\left\{\mathcal{T}^{\vec{P}}_{pesanteur}\right\}_G$; $\left\{\mathcal{T}^{F^1_{01}}_{S_0 \to S_1}\right\}_{A_1}$

$\left\{\mathcal{T}^{F^2_{01}}_{S_0 \to S_1}\right\}_{A_2}$; $\left\{\mathcal{T}^{\vec{F}_B}_{S_2 \to S_1}\right\}_B$

On applique le théorème du moment statique en I

ce qui donne $\vec{M}_{I,\vec{P}} + \underbrace{\vec{M}_{I,\vec{F}^1_{01}}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{M}_{I,\vec{F}^2_{01}}}_{=\vec{0}} + \vec{M}_{I,\vec{F}_B} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{IG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{IB} \wedge \vec{F_B} = \vec{0}$$

$$(x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0) \wedge (-mg\,\vec{y}_0) + L_2 \vec{x}_{12} \wedge F_B \vec{x}_2 = \vec{0}$$

$$-x_G mg\,\vec{z}_0 + L_2(\cos\alpha_{12}\vec{x}_0 + \sin\alpha_{12}\vec{y}_0) \wedge F_B(\cos\alpha_2\vec{x}_0 + \sin\alpha_2\vec{y}_0) = \vec{0}$$

$$-x_G mg\,\vec{z}_0 + F_B L_2(\cos\alpha_{12}\sin\alpha_2 - \sin\alpha_{12}\cos\alpha_2)\vec{z}_0 = \vec{0}$$

d'où $\boxed{F_B = \dfrac{x_G mg}{L_2 \sin(\alpha_{12} - \alpha_2)}}$

Q26 On isole le solide S_3 et on applique le théorème du moment statique en E

le BAME donne : $\left\{\mathcal{T}^{\text{Réducteur}}_{S_0 \to S_3}\right\}_E = \left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ C_{red}\vec{z}_0\end{matrix}\right\}_E$

$$\left\{\mathcal{T}^{F_B}_{S_2 \to S_3}\right\}_D = \left\{\begin{matrix}F_B\vec{x}_2 \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_D$$

TMS donne $\vec{M}_{E,C_{red}} + \vec{M}_{E,\vec{F_B}} = \vec{0}$

$$C_{red}\vec{z}_0 + \overrightarrow{ED} \wedge \vec{F_B} = \vec{0}$$

$$C_{red}\vec{z}_0 + R\vec{x}_3 \wedge F_B\vec{x}_2 = \vec{0}$$

$$C_{red}\vec{z}_0 + RF_B(\cos\alpha_3\vec{x}_0 + \sin\alpha_3\vec{y}_0) \wedge (\cos\alpha_2\vec{x}_0 + \sin\alpha_2\vec{y}_0) = 0$$

$$C_{red}\vec{z}_0 + RF_B(\cos\alpha_3\sin\alpha_2 - \sin\alpha_3\cos\alpha_2)\vec{z}_0 = 0$$

$$C_{red}\vec{z}_0 + RF_B\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\vec{z}_0 = 0$$

ce qui donne l'égalité scalaire

$$\boxed{C_{red} - RF_B\sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 0}$$

Q27 D'où $C_{red} = R F_B \sin(\alpha_3 - \alpha_2)$

$$C_{red} = \frac{R x_G m g}{L_2 \sin(\alpha_{12} - \alpha_2)} \times \sin(\alpha_3 - \alpha_2)$$

A.N. $$C_{red} = \frac{0,086 . 0,506 . 80 . 9,81}{0,14 \sin(108-3)} \times \sin(91-3)$$

$$= 252,4 \text{ N.m}$$

Q28 On suppose le rendement du réducteur égal à 1 :

$$\eta = 1 = \frac{P_{sortie}}{P_{entrée}} = \frac{C_{red}\omega_r}{C_{mot}\,\omega_m}$$

d'où $$C_{mot} = C_{red} \times \frac{\omega_r}{\omega_m} = \boxed{k\,C_{red} = C_{mot}}$$

A.N. $$C_{mot} = \frac{1}{107,7} \times 252,4 = 2,34 \text{ N.m}$$

Partie 4 :

Q29 : $\boxed{V = r_C\,\omega_{10}}$

Q30 Roulement sans glissement de la roue 2

$$\vec{V}_{I\in 2/0} = \vec{0} = \vec{V}_{I\in 2/1} + \vec{V}_{I\in 1/0}$$

$$= \underbrace{\vec{V}_{A\in 2/1}}_{=\vec{0}} + \vec{IA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} + \underbrace{\vec{V}_{O\in 1/0}}_{=\vec{0}} + \vec{IO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

$$\vec{V}_{I\in 2/0} = \vec{0} = R\vec{z}_1 \wedge \omega_{21}\vec{x}_1 - \left(r_c - \frac{L}{2}\right)\vec{x}_1 \wedge \omega_{10}\vec{z}_1$$

$$R\omega_{21}\vec{y}_1 + \left(r_c - \frac{L}{2}\right)\omega_{10}\vec{y}_1 = \vec{0}$$

ce qui donne la relation :

$$R\omega_{21} + \left(r_c - \frac{L}{2}\right)\omega_{10} = 0$$

or $r_c = \dfrac{V}{\omega_{10}}$ d'où $R\omega_{21} + \left(\dfrac{V}{\omega_{10}} - \dfrac{L}{2}\right)\omega_{10} = 0$

alors $\boxed{R\omega_{21} + V - \frac{L}{2}\omega_{10} = 0}$

Q 31 : $\dfrac{\omega_{21}}{\omega_{41}} = k$ d'où $\omega_{41} = \dfrac{\omega_{21}}{k}$

dans l'expression de la question 30 cela donne

$$Rk\,\omega_{41} + V - \frac{L}{2}\omega_{10} = 0$$

$$\boxed{\omega_{41} = \frac{L\omega_{10} - 2V}{2Rk}}$$

Q32 Par analogie on a la relation :

$$R\omega_{31} + \left(r_c + \frac{L}{2}\right)\omega_{10} = 0$$

de plus $\dfrac{\omega_{31}}{\omega_{51}} = k$ $\omega_{31} = k\omega_{51}$ et $r_c = \dfrac{V}{\omega_{10}}$

d'où $Rk\omega_{51} + V + \dfrac{L}{2}\omega_{10} = 0$

$$\boxed{\omega_{51} = \frac{-L\omega_{10} - 2V}{2Rk}}$$

Q 33 La variation d'angle de 360° est codée sur 10 bits, c'est à dire qu'il y a $2^{10} = 1024$ possibilités de codage, la précision est donc de $\frac{360°}{1024}$ $= 0{,}35°$

Q 34 δ est limité de $-45°$ à $+45°$, la plage est donc de 90° centré sur 0 ce qui donne $\frac{1024}{4}$ = 256 positions

Q 35 on a $a_f = \frac{V^2}{r_c}$ or $V = r_c\,\omega_{10} \Rightarrow r_c = \frac{V}{\omega_{10}}$

alors $a_f = \frac{V^2}{V} \times \omega_{10} = V\,\omega_{10}$

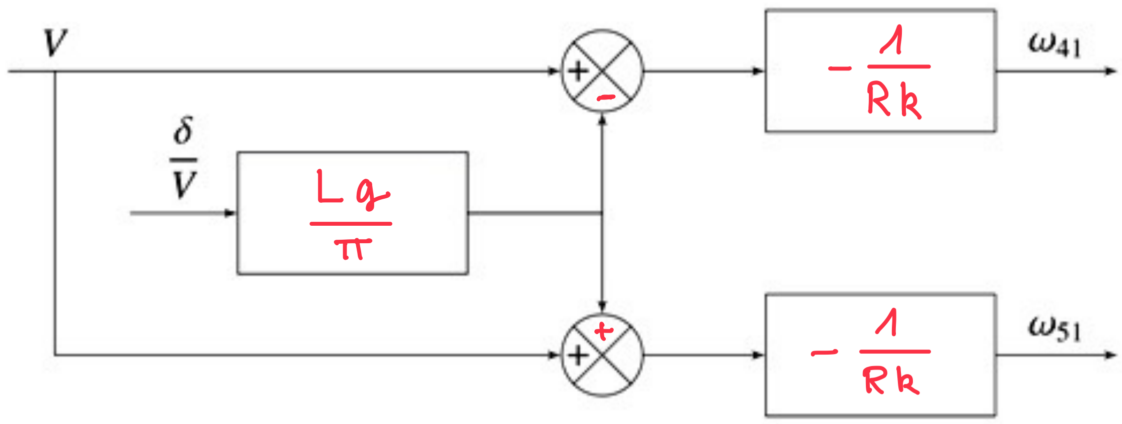
A.N. $a_{f\,max} = 0{,}5g$ $\quad V_{max} = 10\,km/h = 2{,}77\,m/s$

d'où $\boxed{\omega_{10\,max} = \frac{a_{f\,max}}{V_{max}}}$

A.N. $\omega_{10\,max} = \frac{0{,}5 \times 9{,}81}{2{,}77} = 1{,}76\,rad/s$

Q36 On a l'expression $V - L\frac{g\delta}{V\pi} = -Rk\omega_{41}$

donc $\omega_{41} = -\frac{1}{Rk}\left(V - L\frac{g\delta}{V\pi}\right)$



FIN