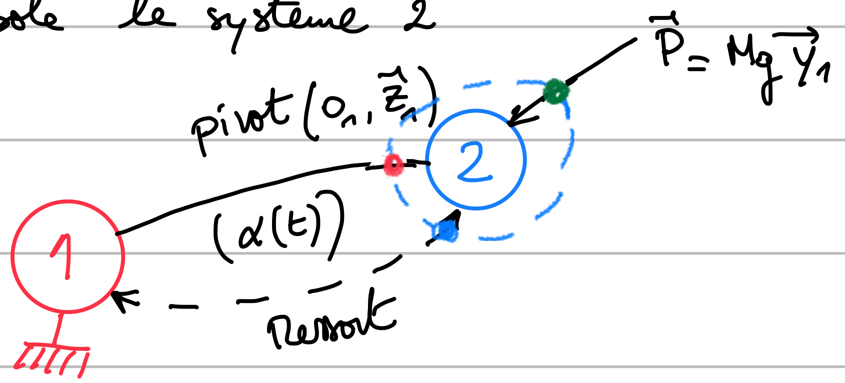
Correction du DM Toussaint 2024

Q1 On isole le système 2



Le bilan des actions mécaniques extérieures donne :

$$\left\{\mathcal{T}^{\vec{P}}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} -Mg\,\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G \qquad \left\{\mathcal{T}^{Pivot}_{1\to 2}\right\}_{O_1} = \left\{\begin{matrix} X_o\vec{x}_1 + Y_o\,y_1 \\ -\mu\,\dot{\alpha}\,\vec{z}_1 \end{matrix}\right\}_{O_1}$$

$$\left\{\mathcal{T}^{Ressort}_{1\to 2}\right\}_{O_1} = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ (C_0 - k(\alpha-\alpha_0))\vec{z}_1 \end{matrix}\right\}_{O_1}$$

En appliquant le théorème du moment statique à 2 en O_1 cela donne :

$$\vec{O_1G} \wedge -Mg\,\vec{y}_1 - \mu\dot{\alpha}\vec{z}_1 + C_0 - k(\alpha-\alpha_0)\vec{z}_1 = \vec{0}$$

$$d\,Mg\sin\alpha - \mu\dot{\alpha} + C_0 - k(\alpha - \alpha_0) = 0$$

or on est à l'équilibre donc $\dot{\alpha} = 0$

il vient $\boxed{C_0 = k(\alpha-\alpha_0) - d\,Mg\sin\alpha}$

Q2 La masselotte peut être déplacée de $\pm\frac{c}{2}$

la variation de moment qu'elle apporte est donc

$\boxed{\Delta M = \pm\, g \times \frac{c}{2} \times m \times \sin\alpha}$ A.N. $\Delta M = \pm 4 \times \frac{18}{2} \times 60 \times 10^{-3} \times \frac{1}{2} = 1{,}08\,\text{mm N}$

Q3 On applique la définition du moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_{O_1 \in 2/R_0} = \bar{\bar{I}}(O_1, 2) \cdot \vec{\Omega}_{1/2} + \vec{O_1G} \wedge M \vec{V}_{O_1 \in 2/R_0}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}\vec{z}_1 \end{bmatrix} + M d \vec{y}_2 \wedge (V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1)$$

$$= J\dot{\alpha}\vec{z}_1 + Md(-\sin\alpha \vec{x}_1 + \cos\alpha \vec{y}_1) \wedge (V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1)$$

$$= J\dot{\alpha}\vec{z}_1 + Md(-\sin\alpha V_y - \cos\alpha V_x)\vec{z}_1$$

d'où $\boxed{\vec{\sigma}_{O_1 \in 2/R_0} = [J\dot{\alpha} - Md(\sin\alpha V_y + \cos\alpha V_x)]\vec{z}_1}$

Q4 On applique la définition du moment dynamique :

$$\vec{\delta}_{O_1 \in 2/R_0} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{O_2 \in 2/R_0}\right) + M \vec{V}_{O_1 \in 2/R_0} \wedge \vec{V}_{G \in 2/0}$$

or $\vec{V}_{G \in 2/0} = \vec{V}_{G \in 2/1} + \vec{V}_{G \in 1/0} = \vec{GO_1} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} + V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1$

$$= -d\vec{y}_2 \wedge \dot{\alpha}\vec{z}_1 + V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1$$

$$= -d\dot{\alpha}\vec{x}_2 + V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1$$

alors $\vec{\delta}_{O_1 \in 2/R_0} = \frac{d}{dt}\left(J\ddot{\alpha} - Md(\sin\alpha V_y + \cos\alpha V_x)\vec{z}_1\right.$

$$+ M(V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1) \wedge \left(-d\dot{\alpha}\vec{x}_2 + V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1\right)$$

$$= \left[J\ddot{\alpha} - Md\left(\cos\alpha\,\dot{\alpha} V_y + \sin\alpha \dot{V}_y - \sin\alpha\,\dot{\alpha} V_x + \cos\alpha \dot{V}_x\right)\right]\vec{z}_1 + \ldots$$

$$\ldots + M(V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1) \wedge \left(-d\dot{\alpha}(\cos\alpha \vec{x}_1 + \sin\alpha \vec{y}_1)\right)$$

Il reste $\vec{\delta}_{O_1 \in 2/R_0} = \left[J\ddot{\alpha} - Md\left(+ \cancel{\dot{\alpha}\cos\alpha V_y} + \sin\alpha \dot{V}_y - \cancel{\dot{\alpha}\sin\alpha V_x} + \cos\alpha \dot{V}_x \right.\right.$

$\left.\left. + \cancel{V_x \dot{\alpha}\sin\alpha} - \cancel{V_y \dot{\alpha}\cos\alpha}\right)\right] \vec{z}_1$

il vient $\boxed{\vec{\delta}_{O_1 \in 2/R_0} = \left[J\ddot{\alpha} - Md\left(\sin\alpha \dot{V}_y + \cos\alpha \dot{V}_x\right)\right]\vec{z}_1}$

d'où $\boxed{\gamma_{x_2}(t) = \sin\alpha \dot{V}_y + \cos\alpha \dot{V}_x}$

Q5 On applique le théorème du moment dynamique au système 2. Le bilan des actions mécaniques extérieures est le même que pour l'étude statique

on a : $\sum \vec{M}_{\vec{F}_{ext}, O_1} = \vec{\delta}_{O_1 \in 2/R_0}$ en projection sur $\vec{z}_1$ on a :

$$dMg\sin\alpha - \mu\dot{\alpha} + C_0 - k(\alpha - \alpha_0) = J\ddot{\alpha} - Md\,\gamma_{x_2}(t)$$

d'où $\boxed{J\ddot{\alpha} + \mu\dot{\alpha} + k(\alpha - \alpha_0) = dMg\sin\alpha + dM\gamma_{x_2}(t) + C_0}$ $(*)$

Q6 On pose $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$

$\dot{\alpha} = \Delta\dot{\alpha}$ $\quad \ddot{\alpha} = \Delta\ddot{\alpha}$ (α_0 est une constante indépendante du temps)

on a $\dfrac{\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) - \sin\alpha_0}{\Delta\alpha} \simeq \sin'(\alpha_0)$ (développement limité au 1er ordre) donc $\sin(\alpha_0+\Delta\alpha) = \Delta\alpha \sin'(\alpha_0) + \sin\alpha_0$

$$= \Delta\alpha \cos(\alpha_0) + \sin\alpha_0$$

L'égalité (*) devient donc :

$$J\Delta\ddot{\alpha} + \mu\Delta\dot{\alpha} + k\Delta\alpha = dMg(\Delta\alpha\cos\alpha_0 + \sin\alpha_0) + dM\gamma_{x_2} + C_0$$

d'après la question on a à l'équilibre $\alpha = \alpha_0$

donc $C_0 = k(\alpha_0 - \alpha_0) - dMg\sin\alpha_0$

$$C_0 = -dMg\sin\alpha_0$$

l'égalité devient :

$$J\Delta\ddot{\alpha} + \mu\Delta\dot{\alpha} + k\Delta\alpha = dMg\Delta\alpha\cos\alpha_0 + \cancel{dMg\sin\alpha_0} + dM\gamma_{x_2} \cancel{- dMg\sin\alpha_0}$$

On aboutit à :

$$\boxed{J\Delta\ddot{\alpha} + \mu\Delta\dot{\alpha} + k\Delta\alpha = dMg\Delta\alpha\cos\alpha_0 + dM\gamma_{x_2}} \quad (**)$$

Q7 L'équation (**) dans le domaine temporel devient dans le domaine de Laplace :

$$Jp^2\Delta\alpha(p) + \mu p\Delta\alpha(p) + k\Delta\alpha(p) = dMg\cos\alpha_0\,\Delta\alpha(p) + dM\gamma_{x_2}(p)$$

Alors : $\Delta\alpha(p)\left[Jp^2 + \mu p + (k - dMg\cos\alpha_0)\right] = dM\gamma_{x_2}(p)$

$$\frac{\Delta\alpha(p)}{\gamma_{x_2}(p)} = \frac{dM}{Jp^2 + \mu p + (k - dMg\cos\alpha_0)}$$

Sous forme canonique cela donne :

$$\boxed{\frac{\Delta\alpha(p)}{\gamma_{x_2}(p)} = \frac{\frac{dM}{k-dMg\cos\alpha_0}}{1 + \frac{\mu}{(k-dMg\cos\alpha_0)}p + \frac{J}{(k-dMg\cos\alpha_0)}p^2}} \quad (***)$$

Si les 3 coefficients du dénominateur sont de même signe alors on est sûr d'avoir des pôles à partie réelle négative donc un système stable.

$1>0$ il vient donc que la condition de stabilité est donnée par $k - dMg\cos\alpha_0 > 0$

i.e. $\boxed{k > dMg\cos\alpha_0}$

On peut dire que si la raideur du ressort est supérieure à la valeur limite $dMg\cos\alpha_0$, le système est stable ;

Q8 : D'après l'égalité $(***)$ on a un gain A tel que :

$$\boxed{A = \frac{dM}{k-dMg\cos\alpha_0}}$$

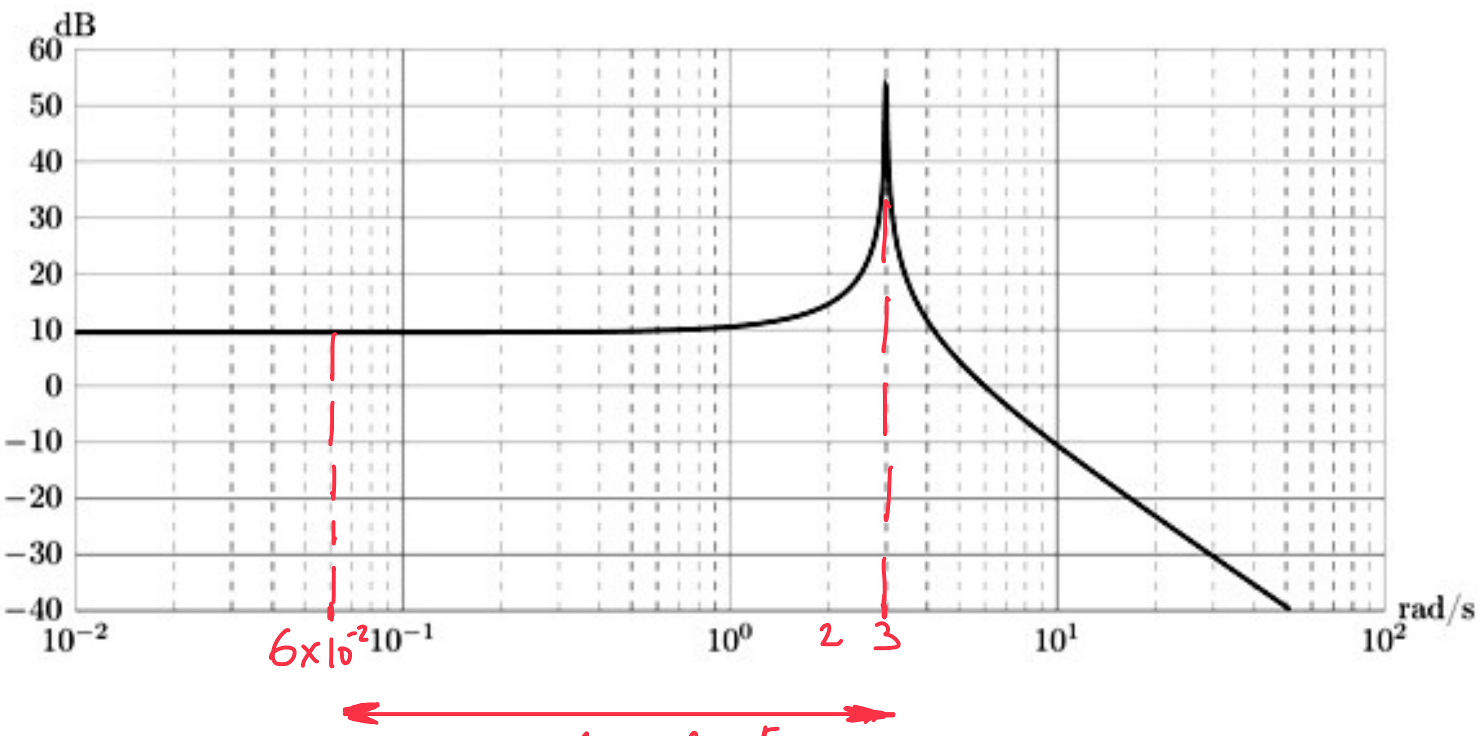
$$\frac{J}{k-dMg\cos\alpha_0} = \frac{1}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k-dMg\cos\alpha_0}{J}}}$$

$$\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{\mu}{k-dMg\cos\alpha_0} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2}\omega_0 \cdot \frac{\mu}{k-dMg\cos\alpha_0}$$

alors $\boxed{\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{J(k-dMg\cos\alpha_0}}}$

Q9 : A est maximum pour un dénominateur $k - dMg\cos\alpha_0$ minimum c'est à dire $\cos\alpha_0 = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha_0 = 0}$

Q10 :



Bande de pulsation comprise entre 0,06 et 3 rad/s

On observe un phénomène de résonance autour de 3 rad/s sinon le gain est égal à 10 dB.

on a bien un gain ≥ 10 dB sur toute la bande de pulsation l'exigence 2.2 est vérifiée.

Par ailleurs pour $G_{dB} = 10\,dB = 20\log|G(j\omega)|$

d'où $A = 10^{10/20} = 10^{0,5} \simeq 3$ rad.m^{-1}.s^{2}

valeur bien supérieure à 2 rad.m^{-1}.s^{2} de l'exigence 2.1.