II. Exigence fonctionnelle : « assurer le mouvement vertical »

a. Élaboration du modèle géométrique direct et du modèle articulaire inverse

Q 1. Détermination des coordonnées opérationnelles l_4 et $h(t)$.

Écriture de la fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{O_0A}+\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2O_0}=\vec{0}\rightarrow l_4.\overrightarrow{y_0}+L.\overrightarrow{y_1}+l_1.\overrightarrow{y_2}-h(t).\overrightarrow{z_0}=\vec{0}$$

En projetant sur $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$:

- Sur $\overrightarrow{y_0}$: $l_4+L.\cos\theta_{10}+l_1.\cos(\theta_{10}+\theta_{21})=0$
- Sur $\overrightarrow{z_0}$: $L.\sin\theta_{10}+l_1.\sin(\theta_{10}+\theta_{21})-h(t)=0$

On en déduit : $l_4=-L.\cos\theta_{10}-l_1.\cos(\theta_{10}+\theta_{21})$ (1)
$h(t)=L.\sin\theta_{10}+l_1.\sin(\theta_{10}+\theta_{21})$ (2)

Q 2. Détermination du modèle articulaire inverse en suivant les conseils du sujet.

- Recherche de θ_{21} :
  En élevant au carré les équations (1) et (2) et en les additionnant, on obtient :
  $$l_4^2+h(t)^2=L^2+2L.l_1\left[\cos(\theta_{10}+\theta_{21}).\cos(\theta_{10})+\sin(\theta_{10}+\theta_{21}).\sin(\theta_{10})\right]+l_1^2$$
  On identifie la forme $\cos a.\cos b+\sin a.\sin b=\cos(a-b)$
  $\Rightarrow \cos(\theta_{21})=\dfrac{l_4^2+h(t)^2-L^2-l_1^2}{2L.l_1}$ d'où $\theta_{21}=\arccos\left(\dfrac{l_4^2+h(t)^2-L^2-l_1^2}{2L.l_1}\right)$
- Recherche de θ_{10} :
  On utilise le modèle géométrique direct avec les équations proposées dans le sujet :
  $$l_1.\cos(\theta_{10}+\theta_{21})=l_4+L.\cos\theta_{10} \quad (3)$$
  $$l_1.\sin(\theta_{10}+\theta_{21})=h(t)-L.\sin\theta_{10} \quad (4)$$

  En élevant au carré les équations (3) et (4) et en les additionnant, on obtient :
  $$2.L.l_4.\cos\theta_{10}-2L.h(t).\sin\theta_{10}=l_1^2-h(t)^2-L^2-l_4^2$$
  On pose $\cos(\varphi)=\dfrac{l_4}{\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}$ et $\sin(\varphi)=\dfrac{-h(t)}{\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}$
  On en déduit alors :
  $$\cos(\theta_{10}-\varphi)=\frac{l_1^2-h(t)^2-L^2-l_4^2}{2.L.\sqrt{l_4^2+h(t)^2}} \text{ et } \varphi=\mathrm{Arctan}\left(-\frac{h(t)}{l_4}\right)$$
  Finalement : $\theta_{10}=\arccos\left(\dfrac{l_1^2-h(t)^2-L^2-l_4^2}{2.L.\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}\right)+\mathrm{Arctan}\left(-\dfrac{h(t)}{l_4}\right)$

b. Élaboration du modèle cinématique

Q 3. Détermination de la vitesse angulaire $\dot{\theta}_{21}$

En dérivant l'expression de $\cos(\theta_{21})$, on obtient :

$$-\dot{\theta}_{21}.\sin(\theta_{21})=\frac{\dot{h}(t).h(t)}{L.l_1}\Rightarrow\dot{\theta}_{21}=-\frac{\dot{h}(t).h(t)}{L.l_1.\sin(\theta_{21})}$$

Q 4. Vitesse maximale du moteur articulaire du genou.

La vitesse est maximale pour t=1,5s. On a alors h = 0,826 m ; $\dot{h}=\frac{0,422\text{ m}}{\text{s}}$;et $\theta_{21}=55,9°$

$$\dot{\theta}_{21}(t=1,5)=-\frac{0,422\ .\ 0,829}{43,1\ .\ 1,8.10^{-4}.\sin(55,9)}=-1,89\ \text{rad/s}$$

$$\dot{\theta}_{mot}=\frac{\dot{\theta}_{21}}{r}=\frac{-1,89}{1/120}-277\ \text{rad/s}\Rightarrow N_{mot}=\frac{30}{\pi}\dot{\theta}_{mot}=-2168,5\ \text{tr/min}$$

c. Élaboration du modèle dynamique

On considère l'ensemble E = {cuisse (2) + charge transportée (4)} dans son mouvement par rapport à R_0.

Q 5. Calcul de la projection du moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1,E/0}.\vec{x}_0$

$$\vec{\sigma}_{O_1,E/0}=\vec{\sigma}_{G_4,E/0}+\overrightarrow{O_1G_4}\wedge\vec{R}_{C,E/0}$$

$\vec{\sigma}_{G_4,E/0}=\vec{0}$ car 4 est en translation /0 , la masse et l'inertie de 2 sont négligées.

$$\vec{R}_{C,E/0}=\vec{R}_{G_4,E/0}=m_4.\vec{V}_{G_4,E/0}=m_4.\dot{h}(t).\vec{z}_0$$

D'où :

$$\vec{\sigma}_{O_1,E/0}=(\lambda(t).\vec{z}_0-L.\cos(\theta_{10}).\vec{y}_0)\wedge m_4.\dot{h}(t).\vec{z}_0=-m_4.\dot{h}(t).L.\cos(\theta_{10})\ .\vec{x}_0$$

$$\vec{\sigma}_{O_1,E/0}.\vec{x}_0=-m_4.\dot{h}(t).L.\cos(\theta_{10})$$

Q 6. Calcul de la projection du moment dynamique $\vec{\delta}_{O_1,E/0}.\vec{x}_0$

Le sujet propose de déduire le résultat à partir du moment cinétique :

$$\vec{\delta}_{O_1,E/0}=\left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{O_1,E/0}\right)_0+m_4.\vec{V}_{O_1/0}\wedge\vec{V}_{G_4,E/0}=(-m_4.\ddot{h}(t).L.\cos(\theta_{10})+m_4.\dot{h}(t).L.\dot{\theta}_{10}.\sin(\theta_{10}))\vec{x}_0+m_4.L.\dot{\theta}_{10}.\vec{z}_1\wedge\dot{h}(t).\vec{z}_0=-m_4.\ddot{h}(t).L.\cos(\theta_{10}).\vec{x}$$

$$\vec{\sigma}_{O_1,E/0}.\vec{x}_0=-m_4.\ddot{h}(t).L.\cos(\theta_{10})$$

Remarque : En faisant le calcul direct du moment dynamique en G_4 *puis le transport en* O_1*, le calcul est plus rapide*

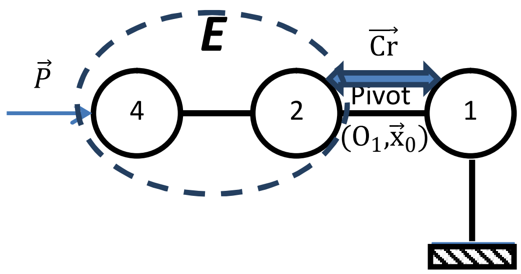
$$\vec{\delta}_{O_1,E/0}=\vec{\delta}_{G_4,E/0}+\overrightarrow{O_1G_4}\wedge\vec{R}_{D,E/0}=(\lambda(t).\vec{z}_0-L.\cos(\theta_{10})\ .\vec{y}_0)\wedge m_4.\ddot{h}(t).\vec{z}_0=-m_4.\ddot{h}(t).L.\cos(\theta_{10}).\vec{x}_0$$

Q 7. Expression du couple Cr

On isole l'ensemble E={4+2} et on applique le théorème du moment dynamique en O_1 en projection sur $\vec{x}_0$.

Inventaire des actions mécaniques extérieures :

- Le poids $\vec{P}$
- Le couple appliqué par le réducteur $\vec{Cr}$
- L'action de la liaison pivot en O_1



Le théorème du moment dynamique en O_1 en projection sur $\vec{x}_0$:

$$\left(\overrightarrow{O_1G_4}\wedge\vec{P}+\vec{Cr}\right).\vec{x}_0=\vec{\delta}_{O_1,E/0}.\vec{x}_0$$

$$Cr=-m_4.\ddot{h}(t).L.\cos(\theta_{10})-m_4.g.L.\cos(\theta_{10})\ \text{ou}\quad Cr=-m_4.L.\cos(\theta_{10}).[\ddot{h}(t)+g]$$

Application numérique : m_4 = 60 kg ; L = 0,518 m ; θ_{10}=54,5° ; $\ddot{h}(t)=\frac{0,42}{0,5}$ m/s²

$$Cr=-60\ .\ 0,518.\cos(54,5°).[0,84+9,81]=192,2\ \text{Nm}$$

Q 8. Calcul du couple moteur

Compte tenu du rendement et du réducteur, le couple moteur s'exprime : $Cm=\frac{r}{\eta}.Cr$

Application numérique : $Cm==\frac{1}{120\ .0,75}.192,2=2,136$ Nm