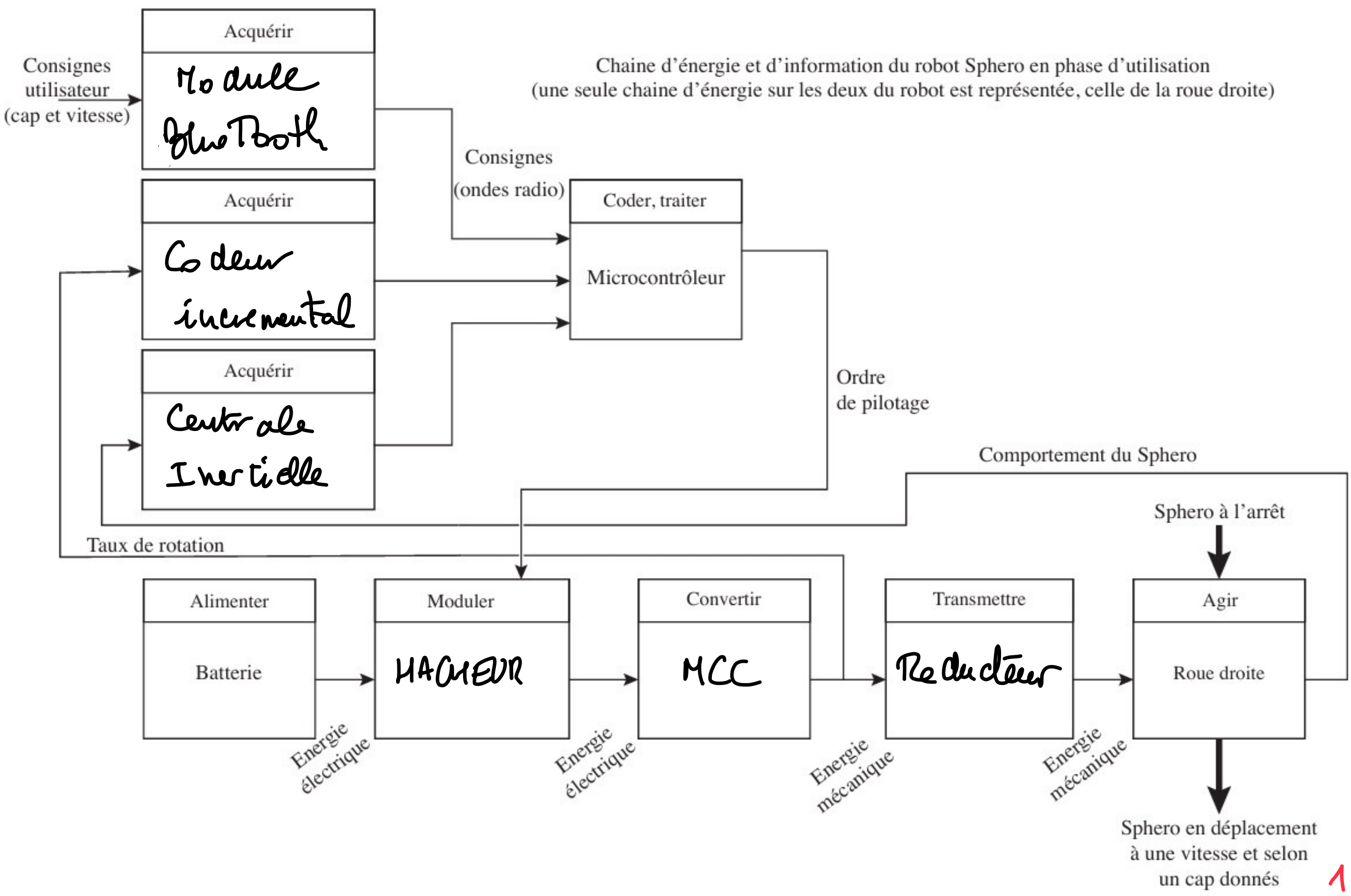
Correction DS 2 du 6 Novembre 2024

Q1 : Il faudrait 3 clics à chaque changement de direction, un premier pour tourner vers la droite de 90° (cap $= -\frac{\pi}{2}$) puis un deuxième pour tourner à gauche (cap $= +\frac{\pi}{2}$), + un clic pour le démarrage

Q2 : L'exigence 2 n'est pas respectée, en effet on note des oscillations autour de la trajectoire théorique Id 2.1.1. ☹

Il y a une dérive de cap Id 2.1.3. ☹

Q3 :



Q4 : Calcul de $\{\mathcal{V}_{6/1}\}_A$, on connaît $\{\mathcal{V}_{6/1}\}$

on a donc $\{\mathcal{V}_{6/1}\}_A = \begin{Bmatrix} p_{61}\vec{x}_6 + r_{61}\vec{z}_6 \\ \vec{0} + \vec{AO} \wedge (p_{61}\vec{x}_{6'} + r_{61}\vec{z}_{6'}) \end{Bmatrix}_{(A,R_{6'})}$

or $\vec{AO} = -L\,\vec{x}'_6$ d'où $\boxed{\{\mathcal{V}_{6/1}\}_A = \begin{Bmatrix} p_{61}\vec{x}_{6'} + r_{61}\vec{z}_{6'} \\ L r_{61}\vec{y}_{6'} \end{Bmatrix}_{A,R_{6'}}}$

Calcul de $\boxed{\{\mathcal{V}_{2/6}\}_A = \begin{Bmatrix} p_{26}\vec{x}_{6'} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A}$ (torseur cinématique de la liaison pivot)

Calcul de $\{\mathcal{V}_{1/2}\}_A$, la résultante (taux de rotation) a des composantes sur tous les axes de la base.

par ailleurs $\vec{V}_{A\in 1/2} = \underbrace{\vec{V}_{I\in 1/2}}_{=\vec{0}\ (RSG)} + \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}_{1/2}$

$$\vec{AI} \wedge \vec{\Omega}_{1/2} = -R\,\vec{z}_{6'} \wedge (p_{12}\vec{x}_{6'} + q_{12}\vec{y}_{6'} + r_{12}\vec{z}_{6'})$$
$$= -R\,p_{12}\,\vec{y}_{6'} + R\,q_{12}\,\vec{x}_{6'}$$

d'où : $\boxed{\{\mathcal{V}_{1/2}\}_A = \begin{Bmatrix} p_{12}\vec{x}_{6'} + q_{12}\vec{y}_{6'} + r_{12}\vec{z}_{6'} \\ R\,q_{12}\,\vec{x}_{6'} - R\,p_{12}\,\vec{y}_{6'} \end{Bmatrix}_A}$

Q5 : On a $\{\mathcal{V}_{6/1}\}_A + \{\mathcal{V}_{1/2}\}_A + \{\mathcal{V}_{2/6}\}_A = \{0\}_A$

La somme des résultantes et de moments de ces 3 torseurs sont nulles.

d'où les 6 équations scalaires :

$$\begin{cases} p_{61} + p_{26} + p_{12} = 0 & (1) \\ q_{12} = 0 & (2) \\ r_{61} + r_{12} = 0 & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} R q_{12} = 0 & (4) \\ L r_{61} - R p_{12} = 0 & (5) \\ 0 = 0 & (6) \end{cases}$$

(3) donne $r_{61} = -r_{12} = r_{21}$ d'après l'expression donnée dans l'énoncé : $r_{21} = k\frac{R}{2L}(p_{36} - p_{56})$ on a

donc $\boxed{r_{61} = k\frac{R}{2L}(p_{36} - p_{56}) \quad \lambda = k\frac{R}{2L}}$

Q6 : L'équation (5) donne

$$p_{12} = \frac{L}{R} r_{61} = k \times \frac{\cancel{R}}{2\cancel{L}} \times \frac{\cancel{L}}{\cancel{R}} (p_{36} - p_{56})$$

donc $\boxed{p_{21} = -p_{12} = \frac{k}{2}(p_{56} - p_{36})}$

Q7 : L'équation (1) donne $p_{61} = -p_{26} - p_{12} = -p_{26} + p_{21}$

or $p_{26} = -k\, p_{36}$ (engrenage à contact extérieur)

d'où $p_{61} = k\, p_{36} + p_{21} = k\, p_{36} + \frac{k}{2}(p_{56} - p_{36})$

$\boxed{p_{61} = \frac{k}{2}(p_{56} + p_{36})}$ $\boxed{\mu = \frac{k}{2}}$

Q8 : Changement de cap et tangage doivent être indépendant, lors d'un changement de cap la vitesse de rotation autour de l'axe $\vec{x}_{61}$ (axe de tangage) doit être nulle, ce qui impose $p_{61} = 0$

Q9 : $p_{61} = 0 \Rightarrow \frac{k}{2}(p_{56} + p_{36}) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{p_{56} = -p_{36}}$$

Les moteurs doivent tourner à la même vitesse mais en sens opposés.

Q10 : r_{61} est la vitesse de rotation autour de l'axe de lacet, en ligne droite $\boxed{r_{61} = 0}$

Q11 : On a $r_{61} = \lambda(p_{36} - q_{56})$

d'où $r_{61} = 0 \Rightarrow \boxed{p_{36} = q_{56}}$

Les moteurs tournent à la même vitesse dans le même sens

Q12 : On $\vec{V}_{K \in 1/0} = \vec{V}_{O_S \in 1/0} + \vec{KO_S} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

$$= V\vec{y}_s + R_s \vec{z}_s \wedge (p_{10}\vec{x}_s + q_{10}\vec{y}_s + r_{10}\vec{z}_s)$$

$$= V\vec{y}_s + R_s p_{10}\vec{y}_s - R_s q_{10}\vec{x}_s = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = -R_s p_{10} \quad \text{et} \quad q_{10} = 0}$$

Q13 : Si $\alpha = 0$ il n'y a pas de mouvement de tangage par rapport à l'axe $\vec{x}_s = \vec{x}_6 = \vec{x}_6$, d'où $\boxed{p_{60} = 0}$

Q14 : On a $p_{60} = p_{61} + p_{10}$ (composition des vitesses)

d'où $\boxed{p_{10} = -p_{61}}$

Q15 : $V = -R_s\, p_{10} = R_s\, p_{61} = \boxed{R_s\, \mu\,(p_{36} + p_{56}) = V}$

avec $\mu = 0{,}105$

A.N. en ligne droite $p_{36} = p_{56} = \dfrac{1200 \times 2\pi}{60} = 40\pi$

d'où $V = 0{,}074 \times 0{,}105 \times 2 \times 40\pi = 1{,}95\ m/s$

$1{,}95 < 2\ m/s$ l'exigence 2.3.2 est bien vérifiée

Q16 : On a la définition du centre de gravité G

$$\overrightarrow{O_sG} = \frac{\sum m_j\, \overrightarrow{O_sG_j}}{\sum m_j}$$

$$\overrightarrow{O_sG} = \frac{m_c\, \overrightarrow{O_sO_s} + m\left(\overrightarrow{O_sG_{m_1}} + \overrightarrow{O_sG_{m_2}}\right) + m_b\left(\overrightarrow{O_sG_{b_1}} + \overrightarrow{O_sG_{b_2}}\right) + m_1\, \overrightarrow{OG_1} + m_s\, \overrightarrow{O_sG_{sm}} + m_r\,(\text{[illegible]})}{M}$$

On constate sur la vue de dessus c'est à dire dans le plan $(\vec{x}_s ; \vec{y}_s)$ que les éléments sont placés symétriquement par rapport au point O_s, le centre de gravité sera placé nécessairement sur l'axe $\vec{z}_s$

le calcul de $\overrightarrow{O_sG}$ devient alors.

$$\overrightarrow{O_sG} = \frac{-2m h_m - 2m_b h_b - m_i h_i + m_s h_s - 2m_r h_r}{M}\,\vec{z_s}$$

d'où $\boxed{x_G = y_G = 0}$ $\boxed{z_G = \frac{-2(m h_m + m_b h_b + m_r h_r) - m_i h_i + m_s h_s}{M}}$

A.N. $z_G = \dfrac{-2(26\times 20 + 7\times 9 + 15\times 1) - 27\times 35 + 9\times 8}{115}$

$\boxed{z_G = -18 \text{ mm}}$

Q17: Le centre de gravité est situé près de 2cm sous le centre O_s de la sphère ce qui procure de la stabilité en terme de tangage (pendule simple)

Q18: On isole l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\} = \Sigma$

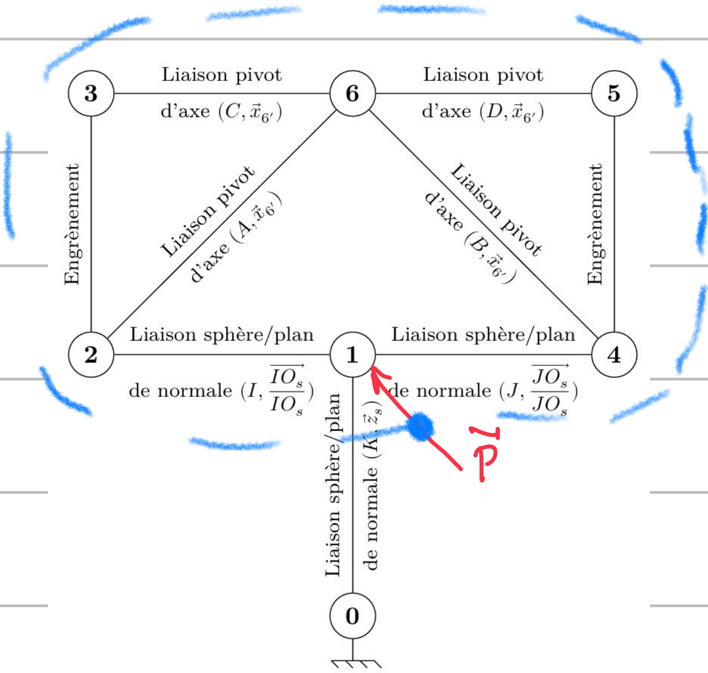


Figure 13 Graphe des liaisons du Sphero

Le B.A.M.E. est constitué de 2 torseurs

$$\left\{\mathcal{T}^{\vec{P}}_{pesanteur}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} -Mg\,\vec{z}_s \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$$

$$\left\{\mathcal{T}^{sph/plan}_{0\to1}\right\}_K = \left\{\begin{matrix} T_{01}\,\vec{y}_s + N_{01}\,\vec{z}_s \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_K$$

Q19 : On part de la définition du moment dynamique

$$\vec{\delta}_{K,\Sigma} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{K,\Sigma}\right) + M\,\underbrace{\vec{V}_{K\in\Sigma/0}}_{\vec{0}\ (RSG)} \wedge \vec{V}_{G\in\Sigma/0}$$

il faut calculer $\vec{\sigma}_{K,\Sigma} = \underbrace{\sum_j I_{K,j}\,\vec{\Omega}_{j/0}}_{=\vec{0}} + \sum_j m_j\,\overrightarrow{KG_j} \wedge \vec{V}_{G_j}$

Le système est en translation rectiligue donc :

$$\forall_j \quad \vec{V}_{G_j} = v\,\vec{y}_s$$

$$\text{d'où } \vec{\sigma}_{K,\Sigma} = \sum_j \underbrace{m_j\,\overrightarrow{KG_j}} \wedge v\,\vec{y}_s$$

$$= M\,\overrightarrow{KG} \wedge v\,\vec{y}_s \quad \text{(définition du centre de gravité)}$$

$$\text{Or } \quad \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{KO_s} + \overrightarrow{O_sG} = R_s\,\vec{z}_s + z_G\,\vec{z}_G$$

$$= R_s\,\vec{z}_s + z_G\left(-\sin\alpha\,\vec{y}_s + \cos\alpha\,\vec{z}_s\right)$$

$$= -z_G\sin\alpha\,\vec{y}_s + \left(R_s + z_G\cos\alpha\right)\vec{z}_s$$

$$\text{alors } \vec{\sigma}_{K,\Sigma} = Mv\left(-\sin\alpha\,\vec{y}_s + \left(R_s + z_G\cos\alpha\right)\vec{z}_s\right)\wedge\vec{y}_s$$

$$= -Mv\left(R_s + z_G\cos\alpha\right)\vec{x}_s$$

on obtient donc $\vec{\delta}_{K,\Sigma} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{K,\Sigma}\right)$

$$\boxed{\vec{\delta}_{K,\Sigma} = -Ma\left(R_S + z_G \cos\alpha\right)\vec{x}_S}$$

puisque $\alpha = cte$ et $\vec{x}_S$ est fixe.

Q20 On applique le théorème du moment dynamique

$$\vec{\delta}_{K,\Sigma} = \sum \vec{M}_{K,\vec{F}_{ext}}$$

$$= \underbrace{\vec{M}_{K,\vec{F}_{sph/plan}}}_{=0} + \vec{M}_{K,\vec{P}} = \vec{KG} \wedge -Mg\,\vec{z}_S$$

alors $-Ma\left(R_S + z_G\cos\alpha\right)\vec{x}_S = \left(-z_G \sin\alpha\,\vec{y}_S + \left(R_S + z_G\cos\alpha\right)\vec{z}_G\right)\wedge -Mg\,\vec{z}_S$

d'où $-\cancel{M}a\left(R_S + z_G\cos\alpha\right)\vec{x}_S = +z_G \sin\alpha\,\cancel{M}g\,\vec{x}_S$

donc $$\boxed{a = \frac{z_G \sin\alpha\, g}{\left(R_S + z_G\cos\alpha\right)}}$$

Q21:

on a $\alpha < 40°$ donc $a(\alpha = 40°) = \frac{\left(-18\times10^{-3}\times\sin 40°\times 9{,}81\right)}{\left(74\times10^{-3} - 18\times10^{-3}\sin 40°\right)}$

$$|a| = 1{,}80\ m/s^2 > 1{,}5\ m/s^2$$ ☺

Q22: On sait que entre $t=0$ et $t=T_3$ le chariot parcourt la distance $x_f - x_0$, or la distance parcourue est l'intégrale de la fonction $V_3(t)$ entre 0 et T_3

Ce qui donne :

$$(X_f - X_0) = \frac{V_m T_1}{2} + V_m \times (T_2 - T_1) + \frac{V_m \times (T_3 - T_2)}{2}$$

Or $T_1 = T_3 - T_2$ et $T_2 - T_1 = T_{acq}$

alors $X_f - X_0 = V_m T_1 + V_m T_{acq}$

d'où $\boxed{T_1 = \frac{(X_f - X_0) - V_m T_{acq}}{V_m}}$

$$\gamma = \frac{V_m}{T_1} = V_m \times \frac{V_m}{(X_f - X_0) - V_m T_{acq}} = \boxed{\frac{V_m^2}{(X_f - X_0) - V_m T_{acq}} = \gamma}$$

A.N. $\boxed{\gamma = \frac{8^2}{(130-10) - 8 \times 10} = \frac{64}{120 - 80} = \frac{64}{40} = 1{,}6 \, m/s^2}$

Q 23 : Calcul de $\vec{\delta}_{O_1 \in 1/0} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{O_1 \in 1/0}\right) + m_R \underbrace{\vec{V}_{O_1 \in 1/0} \wedge \vec{V}_{O_1 \in 1/0}}_{= \vec{0}}$

$$\vec{\sigma}_{O_1 \in 1} = \left(\bar{\bar{I}}_{O_1 \, roue} \cdot \vec{\Omega}_{1/0}\right) + \underbrace{m_R \, \overrightarrow{O_1 O_1} \wedge \vec{V}_{O_1 \in 1/0}}_{= \vec{0}}$$

$$= J_R \cdot \omega_R \, \vec{z}_0$$

d'où $\boxed{\vec{\delta}_{O_1 \in 1/0} = J_R \frac{d\omega_r}{dt} \vec{z}_0}$

Si on isole la roue 1 le B.A.M.E. donne dans le plan $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$

$$\left\{\mathcal{T}^{\vec{P}}_{\text{pesanteur}}\right\}_{O_1} = \left\{\begin{matrix} -m_1 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{O_1}$$

$$\left\{\mathcal{T}^{\text{Pivot}}_{3\to 1}\right\}_{O_1} = \left\{\begin{matrix} X_{31}\vec{x}_0 + Y_{31}\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{O_1}$$

$$\left\{\mathcal{T}^{\text{Contact}}_{0\to 1}\right\}_{I_1} = \left\{\begin{matrix} X_{01}\vec{x}_0 + Y_{01}\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{I_1}$$

$$\left\{\mathcal{T}^{\text{Réducteur}}_{\text{red}1\to 1}\right\}_{O_1} = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ C_R \cdot \vec{z}_0 \end{matrix}\right\}_{O_1}$$

Q24 : On applique le théorème du moment dynamique en O_1

cela donne $\quad J_R \dfrac{d\omega_r}{dt}\vec{z}_0 = C_R\vec{z}_0 + \vec{O_1 I_1} \wedge (X_{01}\vec{x}_0 + Y_{01}\vec{y}_0)$

$$= C_R\vec{z}_0 - R\vec{y}_0 \wedge (X_{01}\vec{x}_0 + Y_{01}\vec{y}_0)$$

$$= C_R\vec{z}_0 + RX_{01}\vec{z}_0$$

d'où l'equation scalaire $\quad C_R + RX_{01} = J_R \dfrac{d\omega_R}{dt} \quad (*)$

l'équation donnée donne $\quad -\dfrac{C_m}{kR} = \dfrac{M_{eq}}{2}\gamma$

or $C_m = kC_R$

on a $V_3 = -R\omega_r \qquad -\dfrac{\cancel{k}C_R}{\cancel{k}R} = \dfrac{M_{eq}}{2}\gamma \Rightarrow C_R = -\dfrac{M_{eq}R}{2}\gamma$

dans l'égalité $(*)$ cela donne $\quad -\dfrac{M_{eq}R\gamma}{2} + RX_{01} = -J_R\,\gamma/R$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = -\frac{1}{R}\gamma \quad \text{d'où} \quad X_{o1} = \frac{1}{R}\left(-J_R\frac{\gamma}{R} + \frac{M_{eq} R}{2}\gamma\right) = \gamma\left(-\frac{J_R}{R^2} + \frac{M_{eq}}{2}\right)$$

or $M_{eq} = m_3 + 2 m_R + 2\frac{J_R}{R^2}$

d'où $M_{eq} - m_3 - 2m_R = 2\frac{J_R}{R^2}$

$$J_R = \frac{R^2}{2}\left(M_{eq} - m_3 - 2m_R\right)$$

donc $X_{o1} = \gamma\left(-\frac{1}{R^2}\left(\frac{R^2}{2}\left(M_{eq} - m_3 - 2m_R\right)\right) + \frac{M_{eq}}{2}\right)$

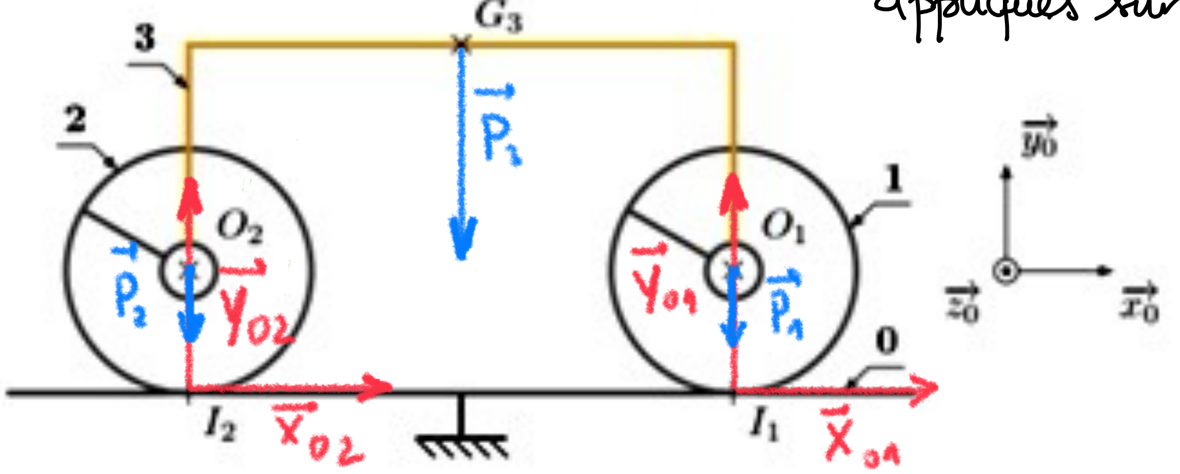
$$= \gamma\left(-\frac{M_{eq}}{2} + \frac{m_3}{2} + m_R + \frac{M_{eq}}{2}\right)$$

$$\boxed{X_{o1} = \gamma\left(m_R + \frac{m_3}{2}\right)}$$

Les couple moteurs sont égaux, ainsi que les moments d'inertie et le diamètre des roues. donc:

$$\boxed{X_{o2} = X_{o1} = \gamma\left(m_R + \frac{m_3}{2}\right)}$$

Q25: On isole Σ, voici les efforts et couples extérieurs appliqués sur Σ



Si on veut déterminer l'expression il convient d'appliquer le TMD en I_2 seul le moment statique de Y_{01} est non nul en I_2

On cherche donc le moment dynamique en I_2 de Σ

$$\vec{\delta}_{I_2 \in \Sigma/0} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{I \in \Sigma/0}\right) + (m_3 + 2m_R)\,\underbrace{\vec{V}_{I_2 \in \Sigma/0} \wedge \left(\vec{V}_{0_1} + \vec{V}_{0_2} + \vec{V}_{G_3}\right)}_{= \vec{0}\ (RSG)}$$

$$\vec{\sigma}_{I_2 \in \Sigma/0} = \vec{\sigma}_{I_2 \in roue_1} + \vec{\sigma}_{I_2 \in roue_2} + \vec{\sigma}_{I_2 \in 3/0}$$

$$= \vec{\sigma}_{0_1 \in roue_1/0} + \vec{I_2 0_1} \wedge m_R \vec{V_3} + \vec{\sigma}_{0_2 \in roue_2/0} + \vec{I_2 0_2} \wedge m_R \vec{V_3}$$

$$+ \underbrace{\vec{\sigma}_{G_3 \in 3/0}}_{= \vec{0}} + \vec{I_2 G_3} \wedge m_3 \vec{V_3}$$

$$\vec{\sigma}_{I_2 \in \Sigma/0} = 2J_R\omega_R + (R\vec{y}_0 + 2L\vec{x}_0) \wedge m_R V_3 \vec{x}_0 + R\vec{y}_0 \wedge m_R V_3 \vec{x}_0 + \left((R+H)\vec{y} + L\vec{x}_0\right) \wedge m_3 V_3 \vec{x}_0$$

$$= 2J_R\omega_R \vec{z}_0 - m_R R V_3 \vec{z}_0 - R m_R V_3 \vec{z}_0 - (R+H) m_3 V_3 \vec{z}_0$$

d'où $$\vec{\delta}_{I_2 \in \Sigma/0} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{I_2 \in \Sigma/0}\right) + (m_3 + 2m_R)\,\underbrace{\vec{V}_{I_2 \in \Sigma/0} \wedge \left(\vec{V}_{G_3} + \vec{V}_{0_1} + \vec{V}_{0_2}\right)}_{= \vec{0}\ (RSG)}$$

d'où $$\vec{\delta}_{I_2 \in \Sigma/0} = \left[-2J_R\frac{\gamma}{R} - \left(2m_R R + (R+H)m_3\right)\gamma\right]\vec{z}_0$$

$$\boxed{\vec{\delta}_{I_2 \in \Sigma/0} = -\left(\frac{2J_R}{2} + 2m_R R + (R+H)m_3\right)\gamma\,\vec{z}_0}$$

Q26 : Pour déterminer Y_{02} on peut appliquer le TRD à Σ et utiliser la projection sur $\vec{y}_0$

Q27 : Il n'y a pas de glissement tant que $X_{01} < f_1 Y_{01}$

et $X_{02} < f_2 Y_{01}$

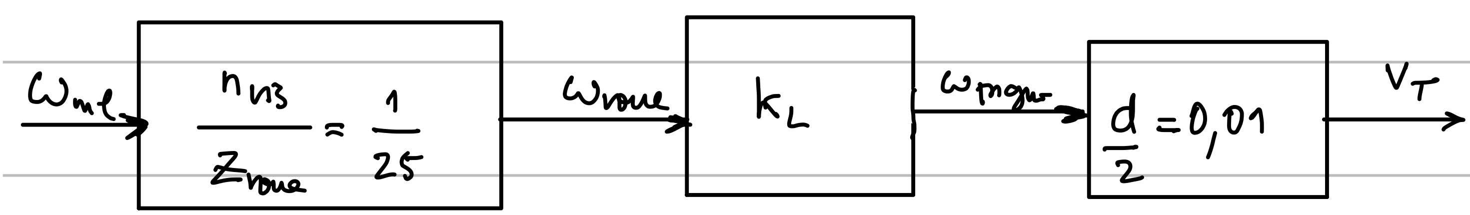
La démarche est la suivante :

- On détermine $X_{01} = X_{02}$ pour l'accélération max
- On détermine Y_{01} et Y_{02}
- On fait les rapports $\left|\frac{X_{01}}{Y_{01}}\right|$ et $\left|\frac{X_{02}}{Y_{02}}\right|$ pour déterminer f_1 et f_2.

Q28 : Il faut retenir le coefficient de frottement le plus fort ici $f_1 = 0{,}177$, en appliquant un coefficient de sécurité de 2 on a donc un coefficient minimum à avoir de $2 \times 0{,}177 = 0{,}354$

D'après le tableau 1 un bandage des roues avec du PVC convient avec un coef de frottement de 0,5.

Q29



Q30 : En supposant V_T constante $V_T = \frac{C_T}{T_V}$ d'où $T_V = \frac{C_T}{V_T}$

$V_T = \frac{n_{ns} k_L d}{2 Z_{roue}} \omega_{me}$ donc $\boxed{T_V = \frac{2 C_T Z_{roue}}{n_{ns} k_L d}}$ A.N. $\boxed{T_V = 5\,s}$