Inertie

L'inertie est la résistance qu'un corps oppose au changement de son mouvement.

Maîtriser les inerties des solides en mouvement dans un mécanisme est intéressant car il existe un lien direct entre ces dernières et les actions mécaniques qui permettent de faire varier les mouvements.

Masse

On appelle système matériel, un ensemble de particules caractérisées par une certaine quantité de matière. On appelle masse d'un système matériel la grandeur scalaire positive représentative de sa quantité de matière.

La masse est l'inertie en translation.

Un système à masse conservative est un système dont la masse ne varie pas au cours du temps.

On appelle centre de masse, ou centre d'inertie, ou centre de gravité d'un système matériel Σ, le point G tel que:

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{GP} dm = 0$$

A partir d'un point quelconque: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \int_{\Sigma} \overrightarrow{AP} dm$

Relation du barycentre pour des systèmes constitués de n volumes dont on connaît les centres de gravité G_i:

$$\boxed{m\overrightarrow{AG} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{AG_i} \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Méthodologie pour déterminer la position de G :

1. Identifier les symétries;
2. Décomposer le solide en volumes élémentaires;
3. Utiliser la relation du barycentre.

Moment d'inertie

La masse m ne permet pas à elle seule de caractériser la difficulté de mettre un solide en mouvement de rotation ou de l'en empêcher. On a besoin de connaître la façon dont cette masse est répartie par rapport à l'axe de rotation.

Le moment d'inertie est l'inertie en rotation.

Mécanique du point

Exemple : Energie cinétique dans la mécanique du point

Pour un mouvement de translation : $\boxed{E_c = \frac{1}{2} m V^2}$ Pour un mouvement de rotation : $\boxed{E_c = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2}$

Définition scalaire

On appelle moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe $\Delta = (A, \vec{u})$ la somme des masses élémentaires multipliées par le carré de la distance du point courant à cet axe :

$$\boxed{I_{\Delta,S}=I_{(A,\vec{u}),S}=\int_S r^2dm=\int_S r^2\rho dV} \quad (3)\ \text{Son unité est } [\text{kg.m}^2]$$

Le moment d'inertie caractérise la distribution de la masse d'un solide autour d'une droite.

Pour une même masse globale, plus la matière est éloignée de l'axe, plus le moment d'inertie est grand, et plus il sera difficile de mettre le solide en mouvement de rotation autour de cet axe, ou de l'arrêter.

Question 1 : Déterminer le moment d'inertie d'un cylindre homogène, de centre G , rayon R , axe $(O,\vec{x}_1)$, de hauteur h et de masse m.

$$A_2=I_{xx}=I_{(Gx_1)S}=\int_S r^2dm=\int_S r^2\rho dV=\rho\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{x=0}^{x=h} r^2 r dr d\theta dx=2\pi\rho h\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R=$$
$$2\pi\frac{m}{mhR^2}h\frac{R^4}{4}=m\frac{R^2}{2}$$

Changement d'axe de rotation

Théorème de Huygens scalaire

Soit un solide indéformable de masse et de centre de masse G.

Soit $\Delta=(A,\vec{u})$ une droite de ce solide et soit d la distance au point G à cet axe.
Le moment d'inertie d'un solide autour d'un axe Δ qui ne passe pas par est égale au moment d'inertie d'un axe parallèle au premier passant par G augmenté de md^2.

$$\boxed{I_{(A,zi),S}=I_{(G,\ iz\ )S}+md^2}$$

Opérateur d'inertie

Définition vectorielle d'un moment d'inertie

$$I_{\Delta S}=I_{(A,\vec{u}),S}=\int_S r^2dm=\int_S HP^2dm=\int_S (\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP})^2dm$$
$$\text{car } \vec{u}\wedge\overrightarrow{AP}=\|\vec{u}\|\|\overrightarrow{AP}\|\sin\alpha=AP\frac{HP}{AP}=HP$$

On reconnait un produit mixte ($\vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{u})$) , on peut faire une permutation circulaire.

$$I_{\Delta S}=\int_S(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP})\cdot(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP})dm=\vec{u}\cdot\int_S\overrightarrow{AP}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP})dm$$

Soit un solide indéformable S et un point quelconque A de ce solide.

On appelle opérateur d'inertie au point A du solide l'application vectorielle :

$$\vec{i}_{A,S}: E\to E$$
$$\vec{u}\mapsto\vec{i}_{A,S}(\vec{u})=\int_S\overrightarrow{AP}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AP})dm$$

L'opérateur est linéaire donc représentable par une matrice.

En notant $\overrightarrow{AP}=x\vec{x}+y\vec{y}+z\vec{z}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ on remarque que

$$\overrightarrow{AP}\wedge\vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\wedge\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\begin{pmatrix} yw-vz \\ zu-wx \\ xv-uy \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

L'opérateur $\overrightarrow{AP}\wedge$ s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

L'opérateur $\overrightarrow{AP}\wedge(\overrightarrow{AP}\wedge)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(y^2+z^2) & xy & xz \\ yx & -(z^2+x^2) & yz \\ zx & zy & -(x^2+y^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

La matrice dans la base orthonormée $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ de l’opérateur d’inertie en A du solide S est donc :

$$\bar{\bar{I}}_{A,S}=\left(\vec{I}_{A,S}(\vec{x}),\vec{I}_{A,S}(\vec{y}),\vec{I}_{A,S}(\vec{z})\right)=$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ -\int_S xydm & \int_S (z^2+x^2)dm & -\int_S yzdm \\ -\int_S xzdm & -\int_S yzdm & \int_S (x^2+y^2)dm \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \\ &=\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\end{aligned}}$$

La matrice d'inertie permet de synthétiser les caractéristiques d'inertie d'un solide et de calculer sa dynamique autour des différents axes.

A, B, C sont les moments d'inertie en $[\mathbf{kg{\cdot}m^2}]$. Ils traduisent la répartition de la masse autour des différents axes.

D, E, F sont les produits d'inertie en $[\mathbf{kg{\cdot}m^2}]$. Ils traduisent une asymétrie dans la répartition de la masse par rapport à des plans.

Axes principaux d'inertie

Cette matrice de l'opérateur d'inertie, est symétrique réelle donc toujours diagonalisable. Il y a donc 3 valeurs propres réelles et 3 vecteurs propres orthogonaux.

Les 3 valeurs propres sont appelées les moments d'inertie principaux. Ils sont portés par les axes principaux d'inertie.

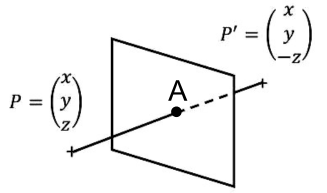
Lorsque la matrice d'inertie est exprimée au centre d'inertie, les axes principaux d'inertie sont appelés les axes centraux d'inertie.

Solides de formes élémentaires

Solide avec plan de symétrie

On considère un solide homogène S admettant 1 plan de symétrie $(A,\vec{x},\vec{y})$. Pour tout point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, il existe un point symétrique $P' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$, donc:

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{A,S} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$



$(A,\vec{x},\vec{y})$

Et avec 2 plans de symétrie :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{A,S} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

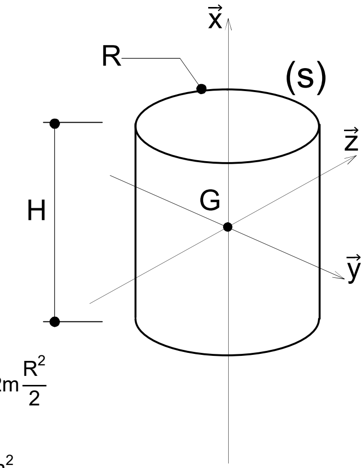
Solide avec axe de révolution

On considère un solide homogène S admettant comme axe de révolution $(A,\vec{z})$. Les plans $(A,\vec{y},\vec{z})$ et $(A,\vec{z},\vec{x})$ sont donc plans de symétrie, donc:

$$\bar{\bar{I}}_{A,S} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Question 2: Déterminer les symétries de la matrice d'inertie du cylindre de hauteur H et de rayon (S).
Le solide a une symétrie de révolution $(G,\vec{x})$, donc

$$I_{G,S} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



Question 3 : Exprimer cette matrice en son centre d'inertie G.

$$\begin{cases} x \\ y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{On a déjà démontré } A = I_{xx} = m\frac{R^2}{2}$$

$$A+B+B = \int_S (y^2+z^2)dm + \int_S (z^2+x^2)dm + \int_S (x^2+y^2)dm = 2\int_S (x^2+y^2+z^2)dm = 2\int_S x^2\rho dV + 2m\frac{R^2}{2}$$

$$\int_V x^2\rho r dr d\theta dx = \rho\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{x=-\frac{h}{2}}^{x=\frac{h}{2}} x^2 r dr d\theta dx = 2\pi\rho\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=R}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-\frac{h}{2}}^{x=\frac{h}{2}} = 2\pi\frac{m}{\pi R^2 h}\frac{R^2}{2}2\frac{h^3}{24} = m\frac{h^2}{12}$$

$$\Rightarrow A+2B = 2m\frac{R^2}{2} + 2m\frac{h^2}{12} \Rightarrow B = I_{yy} = \frac{1}{2}\left(2m\frac{R^2}{2} + 2m\frac{h^2}{12} - m\frac{R^2}{2}\right) = m\frac{R^2}{4} + m\frac{h^2}{12}$$

$$\boxed{I_{G,S}=\begin{pmatrix} m\frac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

Quantité de vitesse et quantité d'accélération

Mécanique du point

La quantité de mouvement (En l'absence de forces extérieures, ou si leur résultante est nulle, la quantité de mouvement d'un système matériel se conserve), ou quantité de vitesse, d'un point matériel m se déplaçant à une vitesse $\vec{V}$:

$$\boxed{\vec{P}=m\vec{V}}$$

Quand ce point tourne autour d'un axe $\Delta=(A,\vec{u})$, cette quantité de vitesse est caractérisée par le moment cinétique ,$\vec{\sigma}_A$, ou moment de quantité de mouvement :

$$\boxed{\vec{\sigma}_A=\overrightarrow{AP}\wedge m\vec{V}}$$

D'autre part, pour un système à masse conservative, la quantité d'accélération est la dérivée de la quantité de mouvement :

$$\frac{d[\vec{P}]_{/R}}{dt}=\frac{dm}{dt}\vec{V}+m\frac{d[\vec{V}]_{/R}}{dt}=m\vec{A}$$

Torseur cinétique

Soit un système matériel Σ à masse conservative, c'est-à-dire un ensemble de particules caractérisé par une certaine quantité de matière. Σ peut être un solide, plusieurs solides.

On appelle **résultante cinétique** de Σ dans son mouvement par rapport à R la somme des quantités de vitesses élémentaires en translation :

$$\boxed{\overrightarrow{R_{C\Sigma/R}}=\int_{\Sigma}\vec{V}_{P\in\Sigma/R}.dm=m\vec{V}_{G\in\Sigma/R}\ \text{ en [kg.m/s]}}$$

On appelle **moment cinétique** de Σ dans son mouvement par rapport à R calculé en un point quelconque la somme des moments cinétiques des quantités de vitesses élémentaires en rotation :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{\Sigma/R}(A)=\int_{\Sigma}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}_{P\in\Sigma/R}.dm\ \text{ en } [kg\cdot m^2/s]}$$

Pour Σ à masse conservative, en particulier pour un solide indéformable S, on a :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{S/R}(B)&=\int_S(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP})\wedge\vec{V}_{S/R}(P)dm=\int_S\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}_{S/R}(P)dm+\overrightarrow{BA}\wedge\int_S\vec{V}_{S/R}(P)dm\\&=\vec{\sigma}_{S/R}(A)+\overrightarrow{BA}\wedge m\vec{V}_{S/R}(G)\end{aligned}$$

On retrouve la formule de Varignon applicable à tous les torseurs et donc ici sur le torseur cinétique ;

On montre que les éléments de réduction du torseur en A sont :

$$\boxed{\{\mathcal{C}_{S/R}\}_A=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{cS/R}}\\ \vec{\sigma}_{A\epsilon S/R}\end{Bmatrix}_A=\begin{Bmatrix}m\vec{V}_{G\epsilon S/R}\\ \bar{\bar{I}}_{A,S}\cdot\vec{\Omega}_{S/R}+\overrightarrow{AG}\wedge m\vec{V}_{A\epsilon S/R}\end{Bmatrix}_A}$$

On a donc deux cas particuliers :

Si A est le centre de masse G :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{S/R}(G)=\bar{\bar{I}}_{G,S}\cdot\vec{\Omega}_{S/R}}$$

Si A est immobile dans le mouvement S/R :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{S/R}(A)=\bar{\bar{I}}_{A,S}\cdot\vec{\Omega}_{S/R}}$$

Torseur dynamique

On appelle résultante dynamique, ou quantité d'accélération, de Σ dans son mouvement par rapport à R la somme des quantités d'accélérations élémentaires en translation :

$$\int_\Sigma \vec{a}_{P\epsilon\Sigma/R}.dm=m\vec{a}_{G\epsilon\Sigma/R}\quad \text{en }[kg\cdot m/s^2]$$

On appelle moment dynamique du solide S dans son mouvement par rapport à R calculé en un point A quelconque la somme des moments dynamiques élémentaires en rotation:

$$\vec{\delta}_{\Sigma/R}(A)=\int_\Sigma \overrightarrow{AP}\wedge\vec{a}_{P\epsilon\Sigma/R}.dm\quad \text{en }[kg\cdot m^2/s^2]$$

Pour Σ à masse conservative, en particulier pour un solide indéformable S, on a :

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{S/R}(B)&=\int_S(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP})\wedge\vec{a}_{S/R}(P)dm=\int_S\overrightarrow{AP}\wedge\vec{a}_{S/R}(P)dm+\overrightarrow{BA}\wedge\int_S\vec{a}_{S/R}(P)dm\\&=\vec{\delta}_{S/R}(A)+\overrightarrow{BA}\wedge m\vec{a}_{G\epsilon S/R}\end{aligned}$$

On retrouve la formule de Varignon applicable à tous les torseurs et donc ici sur le torseur dynamique.

Du torseur cinétique au torseur dynamique

Résultante dynamique :

Le solide S est à masse conservative :

$$\boxed{m\vec{a}_{G\epsilon S/R}=\frac{d}{dt}\left[m\vec{V}_{G\epsilon S/R}\right]_{/R}}$$

On montre que les éléments de réduction du torseur en A sont :

$$\boxed{\{D(S/R)\}_A=\begin{Bmatrix}m\vec{a}_{G\epsilon S/R}\\ \vec{\delta}_{S/R}(A)\end{Bmatrix}_A=\begin{Bmatrix}m\vec{a}_{S/R}(G)\\ \frac{d}{dt}[\vec{\sigma}_{S/R}(A)]_R+\vec{V}_{A\epsilon S/R}\wedge m\vec{V}_{G\epsilon S/R}\end{Bmatrix}_A}$$

On a donc deux cas particuliers : - Si A est le centre de masse G :

$$\boxed{\vec{\delta}_{S/R}(G)=\frac{d}{dt}[\vec{\sigma}_{S/R}(G)]_{/R}=\frac{d}{dt}\left[\bar{\bar{I}}_{G,S}\cdot\vec{\Omega}_{S/R}\right]_{/R}}$$

- Si A est immobile dans le mouvement /R :

$$\boxed{\vec{\delta}_{S/R}(A)=\frac{d}{dt}[\vec{\sigma}_{S/R}(A)]_{/R}=\frac{d}{dt}\left[\bar{\bar{I}}_{A,S}\cdot\vec{\Omega}_{S/R}\right]_{/R}}$$

Système de solides indéformables

On considère que le système Σ se compose de n solides indéformables S_i en mouvement par rapport à R.

Le torseur cinétique est la somme des torseurs cinétiques de chacun des solides.

$$\{C(\Sigma/R)\}_A=\sum_{i=1}^{n}\{C(S_i/R)\}_A$$

Le torseur dynamique est la somme des torseurs dynamiques de chacun des solides.

$$\{D(\Sigma/R)\}_A=\sum_{i=1}^{n}\{D(S_i/R)\}_A$$

Méthodologie

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\boxed{\bar{\bar{I}}_{G,S}} \arrow[d, "(1)\ \vec{\sigma}_{G\in S/R}=\bar{\bar{I}}_{G,S}\cdot\vec{\Omega}_{S/R}"'] & \\
\boxed{\vec{\sigma}_{G\in S/R}} \arrow[r, "\vec{\sigma}_{A\in S/R}=\vec{\sigma}_{G\in S/R}+\overrightarrow{AG}\wedge m\vec{V}_{G\in S/R}", "(4)"'] \arrow[d, "(2)\ \vec{\delta}_{G\in S/R}=\frac{d}{dt}[\vec{\sigma}_{G\in S/R}]_{/R}"'] & \boxed{\vec{\sigma}_{A\in S/R}} \arrow[d, "(5)\ \vec{\delta}_{A\in S/R}=\frac{d}{dt}[\vec{\sigma}_{A\in S/R}]_{/R}+\vec{V}_{A\in S/R}\wedge m\vec{V}_{G\in S/R}"] \\
\boxed{\vec{\delta}_{G\in S/R}} \arrow[r, "\vec{\delta}_{A\in S/R}=\vec{\delta}_{G\in S/R}+\overrightarrow{AG}\wedge m\vec{a}_{G\in S/R}", "(3)"'] & \boxed{\vec{\delta}_{A\in S/R}}
\end{tikzcd}$$

Démarche de calcul d'un moment dynamique

La relation (2) est un cas particulier de la (5).
La relation (4) est toujours plus simple que la (3).
Si $\vec{a}_{S/R}(G)$ est compliquée, alors la relation (3) peut être très longue.
Si A est un point fixe /R, alors $\vec{V}_{/R}(A)=\vec{0}$ et le chemin (1) → (4) → (5) est plus simple que le chemin (1) → (2) → (3).

Parfois, lorsque l'on ne cherche qu'une seule composante selon $\vec{u}$, on peut simplifier le calcul.

Calcul d'une projection de la résultante dynamique

$$\boxed{m\vec{a}_{G\in S/R}\cdot\vec{u}=m\frac{d}{dt}\left[\vec{V}_{G\in S/R}\right].\vec{u}=m\frac{d}{dt}\left[\vec{V}_{G\in S/R}\cdot\vec{u}\right]-m\vec{V}_{G\in S/R}\cdot\frac{d}{dt}[\vec{u}]_{/R}}$$

Par exemple, pour une liaison glissière de direction $\vec{u}$.

Calcul d'une projection du moment dynamique

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{A\epsilon S/R}\right]_{/R}\cdot\vec{u}=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{A\epsilon S/R}\right)\cdot\vec{u}]-\vec{\sigma}_{A\epsilon S/R}\cdot\frac{d}{dt}\left[\vec{u}\right]_{/R}$$

Par exemple, pour une liaison pivot d'axe $(A,\vec{u})$. En effet on a bien:

$$\vec{\delta}_{A\epsilon S/R}=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{A\epsilon S/R}\right]_{/R} \text{ puisque } \vec{V}_{A\epsilon S/R}=\vec{0}$$

Energie cinétique

Mécanique du point

Pour un point matériel de masse m se déplaçant à une vitesse V dans un repère R, l'énergie cinétique est l'énergie accumulée lors du mouvement. Elle correspond au travail nécessaire pour faire acquérir au point sa vitesse depuis le repos.

$$\boxed{E_c=\frac{1}{2}m\vec{V}^2}$$

Expression générale

On considère un système matériel Σ, c'est-à-dire un ensemble de particules caractérisées par une certaine quantité de matière. Σ cela peut être un solide, plusieurs solides ou un fluide.

On appelle énergie cinétique d'un système matériel Σ dans son mouvement par rapport à un repère R la quantité scalaire somme des énergies cinétiques de chacun de ses points.

$$E_{c\Sigma/R}=\frac{1}{2}\int_{\Sigma}\vec{V}_{P\epsilon\Sigma/R}{}^2.dm$$

L'unité est le Joule [J].

Pour un solide indéformable, on montre que l'énergie cinétique est la moitié du comoment du torseur cinétique par le torseur cinématique:

$$\boxed{E_{cS/R}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}m\vec{V}_{A\epsilon S/R}\\ \vec{\sigma}_{A\epsilon S/R}\end{Bmatrix}_A\otimes\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{S/R}\\ \vec{V}_{A\epsilon S/R}\end{Bmatrix}_A=m\vec{V}_{A\epsilon S/R}.\vec{V}_{A\epsilon S/R}+\vec{\sigma}_{A\epsilon S/R}.\vec{\Omega}_{S/R}}$$

Solide en translation

Pour un solide en **translation**, on a donc:

$$E_{cS/R}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}m\vec{V}_{G\epsilon S/R}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}\otimes\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{V}_{G\epsilon S/R}\end{Bmatrix}=\boxed{\frac{1}{2}m\vec{V}_{G\epsilon S/R}}^2$$

Solide en **rotation** autour d'un axe immobile dans R

Pour un solide en rotation un taux de rotation $\vec{\Omega}_{S/R}=\omega.\vec{z}$=autour de l'axe immobile $(A,\vec{Z})$ dans R , on a donc :

$$E_{cS/R}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ I_{zz}.\omega.\vec{z}\end{Bmatrix}_A\otimes\begin{Bmatrix}\omega.\vec{z}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A=\boxed{\frac{1}{2}I_{zz}.\omega^2}$$