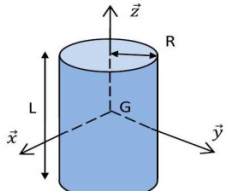
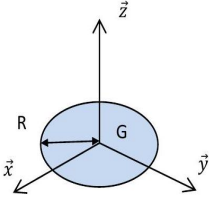
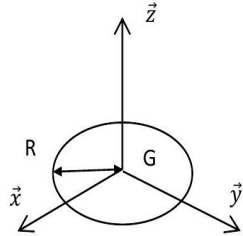
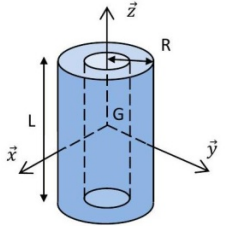
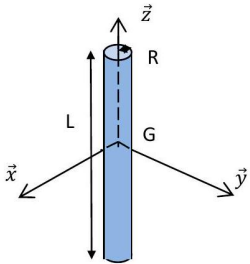
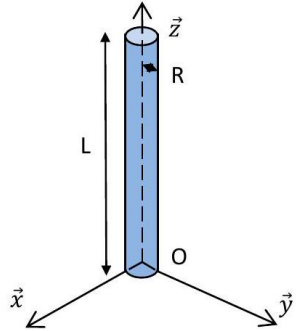


**Caractériser les inerties des solides en mouvement**

**Exercice 1 : MATRICE D'INERTIE DE SOLIDES A SYMETRIES CYLINDRIQUES**

On considère des solides homogènes.

Donner l'expression de la matrice d'inertie, au centre d'inertie dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , de chacun des solides suivants :

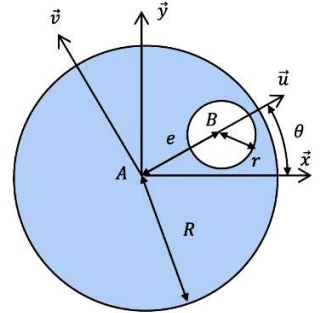
Cylindre de masse $m$	Disque de masse et d'épaisseur négligeable	Cerceau de masse $m$ , d'épaisseur négligeable et de section négligeable
		
Tube de masse $m$	Tige de masse et de section négligeable	Tige de masse et de section négligeable
		

**Exercice 2 : DISQUE PERCE**

On s'intéresse à un solide homogène d'épaisseur négligeable et de masse totale  $m$ .

Il est schématisé sur la figure ci-contre et est constitué :

- d'un disque plein 1 de centre  $A$  et de rayon  $R$  ;
- d'un disque creux 2 de centre  $B$  et de rayon  $r$ , excentré par rapport au premier disque d'une distance  $e$ .



Question 1 : Déterminer la position du centre de masse en fonction de  $r, R$  et  $e$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ .

On souhaite ramener en le centre de masse de l'ensemble. Pour cela, on dispose de deux masses ponctuelles additionnelles de coordonnées  $P_3 = (r_3 \cos \theta_3, r_3 \sin \theta_3, 0)_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})}$  et  $P_4 = (r_4 \cos \theta_4, r_4 \sin \theta_4, 0)_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})}$  de masses respectives  $m_3$  et  $m_4$ .

Question 2 : Déterminer 2 relations à poser sur les coordonnées de ces deux points afin d'atteindre l'objectif proposé.

**Exercice 3 : MATRICE D'INERTIE DE SOLIDES ELEMENTAIRES A SYMETRIES PLANES**

Question 1 : Donner l'expression de la matrice d'inertie, au centre d'inertie dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , de chacun des solides suivants :

Parallélépipède de masse $m$	Plaque rectangulaire de masse $m$ et d'épaisseur négligeable	Tige de masse $m$ et de section négligeable

Question 2 : Conclure.

**Exercice 4: MATRICE D'INERTIE**

Question 1 : Indiquer la forme des matrices d'inertie des solides suivants :



**Exercice 5: INERTIE DU MAXPID**

On s'intéresse à un bras articulé d'un robot cueilleur de fruit.

Objectif : exploiter et interpréter les résultats d'une simulation numérique.

Question 1: Déterminez le moment d'inertie du Maxpid pour 2 masse utile pour calculer le moment d'inertie équivalent rapporté à l'arbre moteur  $J_{eq}$ .

**Propriétés de masse de Bras complet**  
 Configuration: Défaut  
 Système de coordonnées: Système de coordonnées

Masse = 2.35440 kilogrammes  
 Volume = 0.00043 mètres cubes  
 Superficie = 0.11748 mètres carrés

Centre de gravité: ( mètres )  
 X = -0.00010  
 Y = 0.18156  
 Z = -0.00019

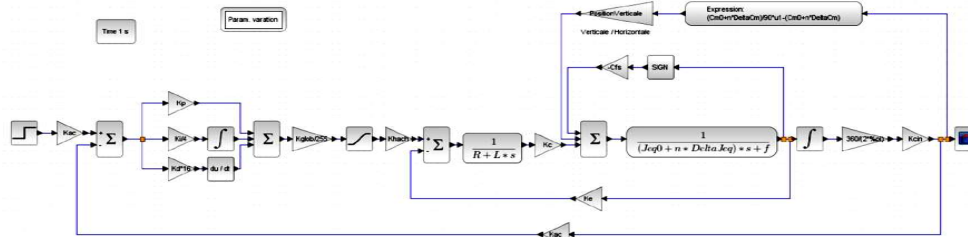
Principaux axes et moments d'inertie: ( kilogrammes \* mètres carrés )  
 Pris au centre de gravité.  
 Ix = (-0.00132, 1.00000, 0.00054)      Px = 0.00240  
 Iy = (0.00918, -0.00053, 0.99996)      Py = 0.03628  
 Iz = (0.99996, 0.00132, -0.00918)      Pz = 0.03698

Moments d'inertie: ( kilogrammes \* mètres carrés )  
 Pris au centre de gravité et aligné avec le système de coordonnées de sortie.  
 Lxx = 0.03698      Lxy = -0.00005      Lxz = 0.00001  
 Lyx = -0.00005      Lyy = 0.00240      Lyz = 0.00002  
 Lzx = 0.00001      Lzy = 0.00002      Lzz = 0.03628

Moments d'inertie: ( kilogrammes \* mètres carrés )  
 Pris au système de coordonnées de sortie.  
 bxx = 0.11459      bxy = -0.00009      bzx = 0.00001  
 byx = -0.00009      byy = 0.00240      byz = -0.00007  
 bzx = 0.00001      bzy = -0.00007      bzz = 0.11389

Un ou plusieurs composants ont des propriétés de masse remplacées:  
 Masselotte <3> <Défaut>  
 Masselotte <4> <Défaut>

Question 2: Entourer dans la modélisation causale ci-dessous le moment d'inertie équivalent. Expliquer les différentes parties du schéma.



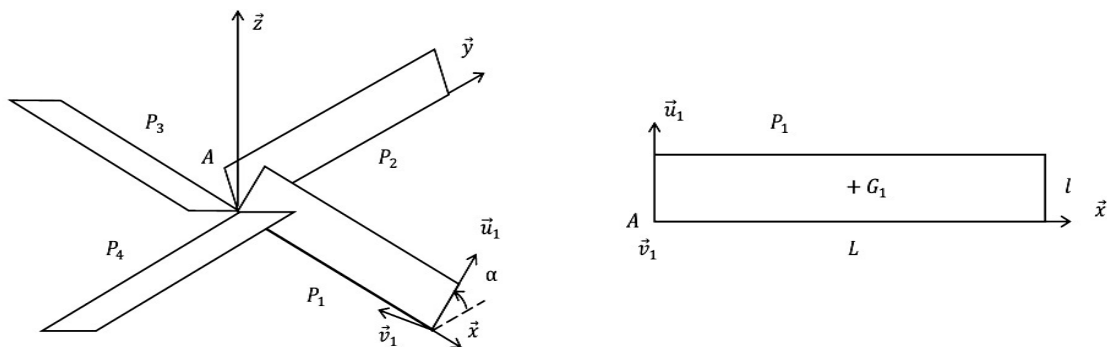
Modélisation multiphysique causale du Maxpid

**Exercice 6: ROTOR D'HELICOPTERE**

On s'intéresse au rotor d'un hélicoptère. Dans une première approche, on peut considérer que ce rotor est composé de quatre pales rigides décalées de 90° et inclinées d'un angle par rapport à l'horizontale.

On note  $\alpha = (\vec{y}, \vec{u}_1) = (\vec{z}, \vec{v}_1)$ .

Chacune de ces pales est considérée d'épaisseur négligeable et a une masse notée M, une longueur L et une largeur l.



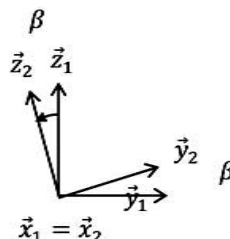
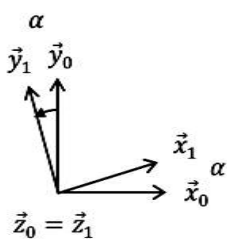
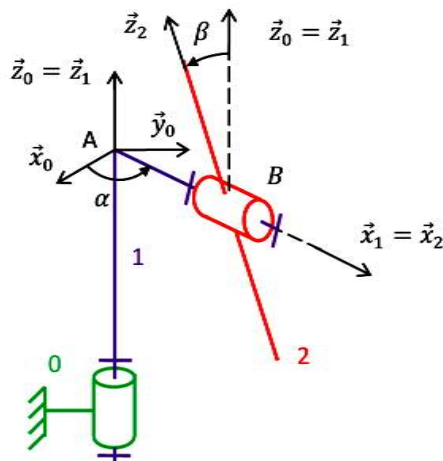
Objectif : caractériser les masses en mouvement.

Question 1: Montrer que la matrice d'inertie du rotor est diagonale au point dans la base (x, y, z).

**Déterminer les torseurs cinétique et dynamique d'un ensemble de solide**

**Exercice 7 : EOLIENNE BIPALE**

On s'intéresse à une éolienne bipale dont le modèle cinématique est donné ci-dessous.



Cette éolienne est constituée :

- d'un mât 0 fixe de repère associé  $R_0=(A,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$  galiléen ;
- d'une girouette 1 , de repère associé  $R_1=(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$  tel que  $\alpha=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)$ ;
- d'une hélice 2 , de repère associé  $R_2=(A,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ , tel que  $\beta=(\vec{z}_1,\vec{z}_2)$ .

**Données:**

Girouette 1 : homogène de masse  $m_1$ , de centre d'inertie A et de matrice d'inertie

$$I_{A,1} = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -D_1 \\ -F_1 & B_1 & -E_1 \\ -D_1 & -E_1 & C_1 \end{pmatrix}$$

Hélice 2 : homogène de masse  $m_2$ , de centre d'inertie B tel que  $\overrightarrow{AB}=l\vec{x}_1$  et de

$$I_{B,2} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

Question 1: Préciser la forme de la matrice d'inertie de la girouette 1 au point A.

Question 2: Déterminer au point A les éléments de réduction du torseur dynamique  $D(1/0)$ .

Question 3 : Déterminer au point A les éléments de réduction du torseur dynamique  $D(2/0)$ .

On considère qu'il existe un balourd 3 de masse  $m_3$ , modélisant un déséquilibre de l'hélice en rotation, représenté par une masse ponctuelle au point  $G_3$ . On pose  $\overrightarrow{AG_3}=c\vec{x}_2+b\vec{z}_2$ .

Question 4: Sans faire de calcul, proposer une démarche pour calculer  $\vec{d}_{3/0}(A)$ .

**Exercice 7 : LE BIONIC BAR DU PAQUEBOT HARMONY**

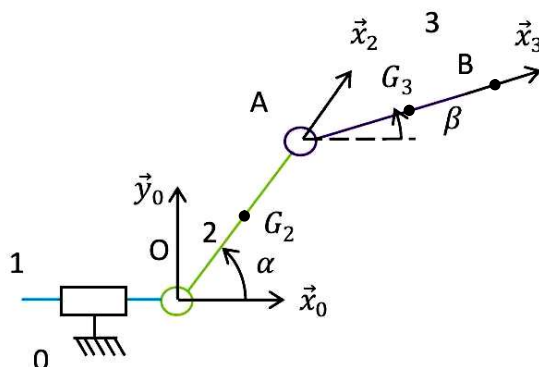


On s'intéresse aux 2 derniers membres du robot barman qui oscillent dans le plan vertical  $(0,\vec{x},\vec{y})$ . Ce robot est constitué de deux bras 2 et 3 identiques homogènes de masse  $m$ , modélisables par des tiges cylindriques de longueur  $L$  et de rayon  $R=0$ .

On associe un repère  $R_i=(O,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ , à chaque solide  $i$ , avec  $i \in \{0,1,2,3\}$ .  $R_0$  est Galiléen.

On pose également  $\overrightarrow{OA}=L\vec{x}_2$  tel que  $\alpha=(\vec{x}_0,\vec{x}_2)$  et  $\overrightarrow{AB}=L\vec{x}_3$  tel que  $\beta=(\vec{x}_0,\vec{x}_3)$ .

On note  $G_2$  le centre d'inertie du bras 2 situé au milieu du segment OA.



On note  $G_3$  le centre d'inertie du bras 3 situé au milieu du segment AB.

Dans la phase de vie étudiée, le mouvement de translation 1/0 est nul.

Question 1 : Déterminer l'expression des matrices d'inertie des bras  $\bar{I}_{G_2,2}$  dans la base  $B_2$  et  $\bar{I}_{G_3,3}$  dans la base  $B_3$ .

Question 2 : Déterminer au point O les éléments de réduction du torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(2/0)\}_O$ .

Question 3 : Déterminer au point O les éléments de réduction du torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(3/0)\}_O$ .

Question 4: Déterminer au point O les éléments de réduction du torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(\{2,3\}/0)\}_O$ .

### Exercice 8 : ROBOVOLC

(d'après un sujet X ENS-PSI )

On s'intéresse au véhicule Robovolc, un robot qui explore le flanc des volcans. Ce robot est capable de :

- s'approcher d'un cratère actif ;
- collecter des échantillons rocheux issus de rejets éruptifs ;
- collecter des échantillons gazeux ;
- collecter d'autres données physiques et chimiques.

### Étude du bras manipulateur

Le package scientifique équipant ROBOVOLC est formé d'un bras manipulateur et d'une pince servant d'effecteur pour collecter des échantillons rocheux et poser/prendre des instruments sur le sol. Ces organes sont pilotés par des moteurs à courant continu contrôlés par des modules électroniques. Le système est en outre constitué d'un système d'échantillonnage des gaz (avec sonde) qui ne sera pas étudié ici.



L'objectif de cette partie est de construire un modèle dynamique du bras manipulateur afin, par la suite, de vérifier le critère suivant du cahier des charges :

CRITÈRE	
masse maximale des objets à saisir	2,5 kg

### Modélisation cinématique

Le bras manipulateur est de type SCARA (Selective Compliance Assembly Robot Arm) ; c'est un système mécanique poly-articulé avec trois axes parallèles et une architecture en série (Figure 1). Il présente plusieurs avantages, notamment sa précision, sa rapidité, et sa très grande rigidité verticale.

L'ensemble est constitué de trois pièces assimilées à des solides indéformables :

- le bras 1 , de masse  $m_1$ , auquel on associe un repère  $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ;
- le bras 2 , de masse  $m_2$ , auquel on associe un repère  $(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ ;



- la tige 3 au bout de laquelle se situe la pince et éventuellement l'objet saisi. La masse  $m_3$  de ce sous-ensemble est supposée ponctuelle au point P correspondant à la position de la pince.

Dans cette étude, le châssis de ROBOVOLC constitue le bâti 0 auquel on associe un repère (fixe)  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . On suppose par la suite que le sol est plan et horizontal ; la direction  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_2$  correspond donc à la verticale. On suppose également que le référentiel lié au bâti est galiléen.

Le positionnement horizontal de la pince dans le plan  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  est obtenu par deux rotations indépendantes :

- celle du bras 1 en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{z}_0)$  par rapport au bâti 0 , on note  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  l'angle correspondant ;
- celle du bras 2 en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{z}_0)$  par rapport au bras 1 , on note  $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  l'angle correspondant.

Le positionnement vertical de la pince est quant à lui obtenu par une liaison glissière de direction  $\vec{z}_0$  entre la tige 3 et le bras 2 .

Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

On note :  $\vec{O_0O_1} = d_1 \vec{z}_0$ ,  $\vec{O_1O_2} = l_1 \vec{x}_1 + d_2 \vec{z}_0$ ,  $\vec{O_2P} = l_2 \vec{x}_2 - \lambda_3 \vec{z}_0$

Les 3 degrés de liberté du bras sont donc  $\theta_1, \theta_2$  et  $\lambda_3$ . Le débattement permis pour les deux liaisons pivot est  $\pm 150^\circ$  (limitation par des butées).

Un schéma cinématique du système est proposé sur la Figure 1.

On donne de plus :

$d_1 = 500$  mm,  $d_2 = 30$  mm,  $l_1 = 500$  mm,  $l_2 = 500$  mm,  
 $m_1 = 2$  kg,  $m_2 = 2$  kg,  $m_3 = 6$  kg (incluant un objet saisi de masse 2,5 kg ).

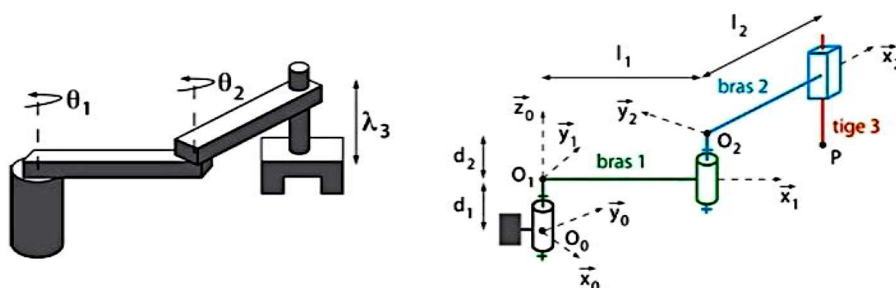


Figure 1 : schématisation et paramétrage du système SCARA

## Modélisation dynamique

**Dans cette sous-partie, on construit un modèle dynamique du bras manipulateur.**

On suppose que chaque bras  $i$  peut être modélisé géométriquement par un parallélépipède rectangle de génératrice  $\vec{x}_i$  et à base carrée dans les directions  $\vec{y}_i$  et  $\vec{z}_i$  (Figure 2). On suppose de plus que le bras est homogène ; son centre de gravité  $G_i$  correspond donc au centre géométrique avec  $\vec{O_iG_i} = \frac{l_i}{2} \vec{x}_i$ .

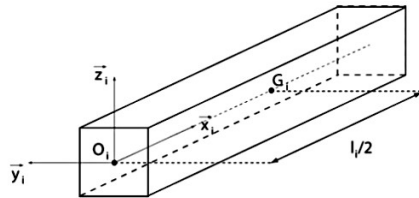


Figure 2 : modèle géométrique d'un bras

On donne l'écriture générale de la matrice d'inertie du bras  $i$  au point  $G_i$  :

$$I(i, G_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)}$$

Question 1: A partir de l'expression générale précédente, préciser et justifier la forme simplifiée de la matrice d'inertie  $I(i, G_i)$  du bras  $i$  prenant en compte sa modélisation géométrique.

Question 2: Calculer  $\vec{V}_{G_1 \in 1/0}$ ,  $\vec{a}_{G_1 \in 1/0}$ ,  $\vec{V}_{G_2 \in 2/0}$ ,  $\vec{a}_{G_2 \in 2/0}$ ,  $\vec{V}_{P \in 3/0}$  et  $\vec{a}_{P \in 3/0}$  en fonction des paramètres variables  $(\theta_1, \theta_2, \lambda_3)$  et des dimensions constantes.

Question 3: A partir du théorème du moment dynamique, donner l'expression du couple moteur  $C_2$  dans la liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{z}_0)$  en fonction de  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$  et des données du problème. Faire de même pour le couple moteur  $C_1$  dans la liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{z}_0)$ . On simplifiera les expressions en introduisant les notations

$$a_i = \frac{l_i}{2}, \alpha = C_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2, \beta = C_2 + m_2 a_1^2 + m_3 l_2^2 \text{ et } \gamma = m_2 l_1 a_2 + m_3 l_1 l_2$$

Question 4 : Montrer alors que la dynamique du système peut être décrite par un système d'équations différentielles du 2nd ordre non-linéaires et couplées, de la forme :

$$\mathbf{M}(\vec{\theta}) \ddot{\vec{\theta}} + \mathbf{C}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) \dot{\vec{\theta}} + \vec{N}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) = \vec{\tau}$$

$$\vec{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \lambda_3]^T;$$

$\mathbf{M}(\vec{\theta})$ : matrice d'inertie ;

$\mathbf{C}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$ : matrice de Coriolis ;

$\vec{N}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$ : vecteur de forces de pesanteur ;

$\vec{\tau} = [C_1, C_2, F_3]^T$  : actions transmises par les moteurs au niveau des liaisons (  $F_3$  est l'effort dans la liaison glissière).

Préciser l'expression des grandeurs  $\mathbf{M}(\vec{\theta})$ ,  $\mathbf{C}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$  et  $\vec{N}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$  en fonction des données.

Question 5 : Montrer que les effets dynamiques dans le plan horizontal sont découplés de ceux dans la direction verticale.

Question 6 : Donner trois éléments qui pourraient faire sortir le modèle dynamique précédent de son domaine de validité.



### Exercice 16 : ENERGIE CINETIQUE D'UNE BUGATTI CHIRON

On considère une Bugatti Chiron lancée à sa vitesse maximale.

$$V_{\text{châssis}} = 420 \text{ km/h.}$$

On donne

$$M_{\text{châssis}} = 1995 \text{ kg, } m_{\text{roue}} = 12 \text{ kg, } R_{\text{roue}} = 0,340 \text{ m, } L_{\text{roue}} = 0,366 \text{ m}$$

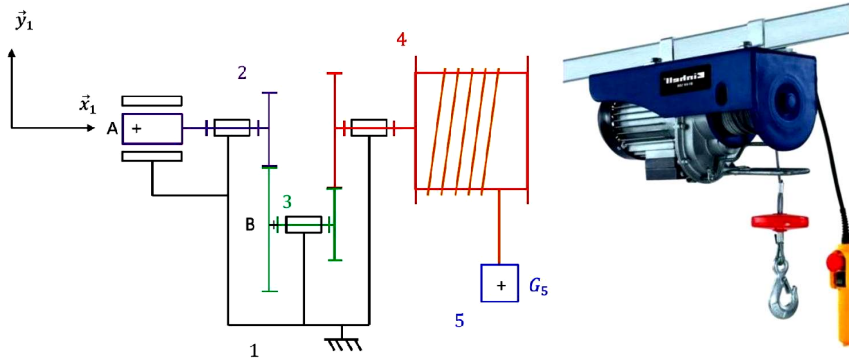


Question 1: Calculer l'énergie cinétique du bolide.

Question 2: L'énergie cinétique des roues est-elle négligeable ?

### Exercice 17: MOTORISATION D'UN TREUIL

On s'intéresse à un treuil dont la photo et le modèle cinématique sont donnés ci-dessous :



Ce mécanisme comprend 5 ensembles :

- Un bâti 1 fixe, auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ;
- Un arbre moteur denté 2, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le bâti :
- de masse  $m_2$ ;
- de centre d'inertie  $G_2$  supposé sur l'axe de rotation;
- de moment d'inertie  $J_2$  par rapport à l'axe de rotation ;
- de nombre de dents  $Z_2$ .
- Un arbre intermédiaire 3 denté 2, en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_1)$  avec le bâti :
- de masse  $m_3$ ;
- de centre d'inertie  $G_3$  supposé sur l'axe de rotation ;
- de moment d'inertie  $J_3$  par rapport à l'axe de rotation ;
- de nombres de dents  $Z_{3a}$  et  $Z_{3b}$ .
- Un tambour et roue dentée 4, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le bâti :
- de rayon  $R$ ;
- de masse  $m_4$ ;
- de centre d'inertie  $G_4$  supposé sur l'axe de rotation ;
- de moment d'inertie  $J_4$  par rapport à l'axe de rotation ;

- de nombre de dents  $Z_4$ .
- Un câble :
- de masse négligeable, supposé inextensible.
- Une charge :
- de masse  $m_5$ ;
- de centre d'inertie  $G_5$  supposé sur l'axe de rotation.

On note  $g$  l'accélération de la pesanteur orientée suivant  $-\vec{y}_1$ .

On note  $C_m$  le couple exercée par le moteur sur l'arbre 2.

Objectif : déterminer la loi de commande en effort en vue de dimensionner le moteur électrique.  $C_m=f(M)$

Dans une première approche, on suppose que toutes les liaisons sont parfaites.

Question 1 : Colorier et compléter le schéma cinématique en y mettant les différents éléments entrant en jeu (couple, vitesse, rendement, moment d'inertie).

Question 2: Déterminer la relation entre  $v_{5/1}$  la vitesse de déplacement de la charge par rapport au bâti et  $\omega_{2/1}$  la vitesse de rotation du moteur.

Question 3 : Proposer et justifier une démarche de résolution pour déterminer la loi de commande en effort.

Question 4 : Déterminer la loi de commande en effort. Interpréter les différents termes trouvés.

Dans une deuxième approche, on suppose un couple résistant au niveau de la liaison tambour-bâti qui est dû à un phénomène de frottement visqueux caractérisé par un coefficient  $\mu$ .

Rendement de chaque train d'engrenages du réducteur :  $\eta_{r1}=\eta_{r2}=0,9$

Question 5 : Modifier la loi de commande en effort obtenue précédemment en tenant compte de ces nouvelles hypothèses.

### Application numérique :

$Z_2=15$  dents  $Z_{3a}=150$  dents  $Z_{3b}=15$  dents  $Z_4=90$  dents Moteur  $N_{2/1}=1400$ tr/min

Tambour du treuil  $\varnothing = 200$  mm

Masse  $m_5=100$  kg

$J_2=8.10^{-3}$  kg·m<sup>2</sup>,  $J_4=2,4$  kg·m<sup>2</sup>,  $J_3=0,12$  m<sup>2</sup>·kg,  $\mu=0,1$

On désire accélérer la charge durant 1 s maximum et la monter sur une distance de 10 m .

Question 6: Choisir un moteur.

TD Caractéristiques géométriques des solides et dynamique

Type	Puissance nominale à 50 Hz	Vitesse nominale	Couple nominal	Intensité nominale	Facteur de puissance	Rendement	Courant démarrage / Courant nominal	Masse
	$P_N$ kW	$N_N$ min <sup>-1</sup>	$C_N$ N.m	$I_N(400V)$ A	$\cos \varphi$	$\eta$ %	$I_D / I_N$	IM B3 kg

Moteurs asynchrones 230V/400V – 6 pôles

<b>LS 80 L</b>	0.25	955	2.5	0.85	0.67	63	3.9	8.4
<b>LS 80 L</b>	0.37	950	3.7	1.1	0.72	66	4.3	9.7
<b>LS 80 L</b>	0.55	950	5.5	1.9	0.64	68	4.9	11
<b>LS 90 S</b>	0.75	930	7.7	2.1	0.77	68	4.2	13.5
<b>LS 90 L</b>	1.1	915	11.5	3	0.75	70	4.7	15.2
<b>LS 100 L</b>	1.5	905	15.8	4.2	0.74	69	4.5	20
<b>LS 100 L</b>	1.8	935	19	4.5	0.76	76	4.5	22
<b>LS 112 M</b>	2.2	905	23.2	5.8	0.76	72	5.6	24.2

Moteurs asynchrones 230V/400V – 4 pôles

<b>LS 63 M</b>	0.18	1390	1.2	0.64	0.65	62	3.7	5
<b>LS 63 M<sup>†</sup></b>	0.18	1410	1.2	0.62	0.75	63	3.7	5
<b>LS 63 M</b>	0.25	1390	1.6	0.85	0.65	65	4	5.1
<b>LS 63 M<sup>†</sup></b>	0.25	1390	1.6	0.85	0.65	65	4	5.1
<b>LS 71 L</b>	0.25	1425	1.7	0.8	0.65	69	4.6	6.4
<b>LS 71 L</b>	0.37	1420	2.5	1.06	0.7	72	4.9	7.3
<b>LS 71 L</b>	0.55	1400	3.8	1.62	0.7	70	4.8	8.3
<b>LS 80 L</b>	0.55	1400	3.8	1.6	0.74	67	4.4	8.2
<b>LS 80 L</b>	0.75	1400	5.1	2.01	0.77	70	4.5	9.3
<b>LS 80 L</b>	0.9	1425	6	2.44	0.73	73	5.8	10.9
<b>LS 90 S</b>	1.1	1429	7.4	2.5	0.84	76.8	4.8	11.5
<b>LS 90 L</b>	1.5	1428	10	3.4	0.82	78.5	5.3	13.5
<b>LS 90 L</b>	1.8	1438	12	4	0.82	80.1	6	15.2